اشتباه استدلالهای هندسی

نوشته یاکوف اسمنویچ دوبنوف

ترجمه پرویز شهریاری

اشتباه
استدلالهای هندسی

نوشتهٔ یاکوف اسمنویچ دوبنوف

ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

یاکوف اسمنویچ دوبنوف

اشتباه استدلالهای هندسی

Яков Семенович Дубнов

ОШИБКИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

چاپ اول: ۱۳۵۰ هـ ش. ـ تهران
چاپ وصحافی: چاپخانهٔ بیست وپنجم شهریور (شرکت سهامی افست)
تعداد ۲۲۰۰ نسخه

شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی ۴۸۴ به تاریخ ۵۰/۴/۲۹

پیش گفتار

قریب چهل سال قبل ن. آ. ایزولسکی که معلم ریاضی سرشناسی بود، در مقاله‌ای دربارهٔ تدریس هندسه، گفتگوی خودرا با دختر دانش‌آموزی نقل می‌کند. دخترک از کلاس پنجم به ششم می‌رفت و یک سال هندسه خوانده بود. این گفتگو هنگام تعطیلات تابستان و بی‌آنکه جنبهٔ شاگردی و معلمی داشته باشد صورت گرفته است. معلم از همصحبت خود می‌پرسد که از درس هندسه چه چیزهائی بیادش مانده است. دخترک مدتی فکر می‌کند، ولی متأسفانه نمی‌تواند چیزی بخاطر بیاورد. معلم نوع سئوال را عوض می‌کند و می‌پرسد: «شما درسال گذشته، در سر درس هندسه چکار می‌کردید؟» دخترک به این سئوال به سرعت جواب می‌دهد: «اثبات می‌کردیم». با آنکه این جواب کمی تعجب‌آور است، ولی می‌تواند منعکس کننده نوع تصوری باشد که اغلب دانش‌آموزان از هندسه دارند. دانش‌آموزان چنین می‌پندارند که: در حساب به حل مسئله می‌پردازند، در جبر علاوه بر مسئله، معادله هم حل می‌کنند و رابطه‌هائی بدست می‌آورند، اما در هندسه قضیه‌ها را اثبات می‌کنند.

باید گفت مدتهاست که دیگر نمی‌توان چنین تصوری از ساختمان هندسه داشت. در پژوهشهای ریاضی زمان ما نمی‌شود گفت که صحبت از عددها وشکلها در میان است. عنوان «قضیه»هائی که باید ثابت شوند اغلب در همه جا به چشم می‌خورد. در همهٔ زمینه‌های ریاضی مسئله حل می‌کنند. در هندسه هم اغلب به حل

معادله متوسل می‌شوند. البته ۲۰۰۰ سال قبل، وقتی که هندسهٔ اقلیدسی، هندسه‌ای که امروز هم درس اساسی مدارس است، بنا می‌شد وضع چنین بود. از آن زمان تاکنون، و در کتابهای درسی زمان ماهم، هندسه به عنوان یک رشته قضیه در نظر گرفته می‌شد (که بعضی از آنها را لم یا فرع می‌نامند) که با طرح مشخصی پی‌ریزی و بهم پیوند داده شده‌اند و با اندک اشاره‌ای می‌توان همهٔ آنها را بیاد آورد. هر قضیه شامل فرض (آنچه داده شده) و حکم (آنچه باید اثبات شود) است. ضمن اثبات قضایا ممکن است تنها به اصول موضوعه یا قضیه‌هائی که قبلاً ثابت شده‌اند استناد کرد. نباید به «واضح بودن مطلب» که گاهی موجب گمراهی می‌شود یا به قضیه‌هائی‌که هنوز ثابت نشده‌اند (ولو اینکه درست‌باشند) تکیه کرد (زیرا خود این قضیه‌ها هم ممکن است بـه قضیه‌هائی که بـاید ثابت شوند تکیه کنند و در اینحال یک «دور منطقی» پیش می‌آید).

همه، به‌نقش‌شکل ضمن اثبات قضیه‌ها آگاهی داریم، زیرا شکل هم‌محتوی قضیه و هم روش اثبات آن را روشن می‌کند. گاهی لازم می‌شود برای اثبات‌یک قضیه چند شکل مختلف رسم کنیم (مثل قضیهٔ زاویهٔ محاطی که هنگام اثبات آن معمولاً سه حالت در نظر می‌گیرند: مرکز دایره یا روی یک ضلع زاویه یـا در داخل و یا در خارج زاویه قراردارد). در چنین مواردی بررسی کلیهٔ اجزاء شکل نسبت بهم ضرورت کامل دارد. نادیده گرفتن یکی از حالتها که نتوان استدلال‌را عیناً برای آن تکرار کرد، قدرت استدلال را از بین می‌برد، زیرا گاهی در چنین حالتی ممکن است قضیه با روش غلطی اثبات شود.

ضمن اثبات قضیه‌ها نباید نقش شکل را نه خیلی بالا برد و نه خیلی پائین آورد. بالا بردن‌ارزش شکل، ممکن است شکل را جزئی از اثبات قضیه جلوه‌گر سازد. از لحاظ نظری هرگونه اثبات هندسی بدون توسل به شکل می‌تواندانجام گیرد و این روش جنبهٔ مثبتی هم دارد که همان بی‌نیازی از توسل به «واضح‌بودن مطلب» است که اغلب گمراه کننده و علت اشتباههـای فـراوان می‌باشد. معـهذا خودداری از رسم شکل هم ممکن است ما را دچار مشکلاتی کند که مثـلاً اگر می‌خواستیم حاصلضرب عددهای چند پیکری را همیشه «به حافظه بسپاریم» دچار می‌شدیم (یا مثلاً بخواهیم شطرنج بازی کنیم «بی آنکه به صفحهٔ شطرنج نگاه کنیم»). خطر اشتباه کردن در اینجا خیلی زیاد می‌شود. بـدیهی است منـظور از شکلی که به اثبات قضیه‌ها کمک می‌کند شکلی است که بخوبی و بـا دقت کافی

رسم شده باشد. وقتی دانش‌آموزی سعی می‌کند شکلی را صحیح رسم کندتصور می‌کند که فقط خواست معلم را بر می‌آورد، در حالیکه با بد رسم کردن شکل، شاگرد، قبل‌از همه خودش‌را تنبیه می‌کند، زیرا بجای‌کمک گرفتن از آن، مزاحمی برای خود ایجاد می‌نماید و اگر ضمن استدلال، در چند مورد، در روی شکلی که خوب رسم نشده دچار اشتباه نشود، همیشه اینطور نخواهد بود.

در این جزوه خواننده ضمن برخورد به شکلهای درست، به شکلهائی هم برخورد خواهد کرد که تا حدی‌گمراه کننده هستند ولی عمداً اینطور رسم‌شده‌اند. موضوع این است که دقت ما به استدلالهائی که اشتباه هستند متوجه خواهد شد و برای چنین استدلالهائی گاهی هم شکل غیر دقیق لازم است (همانطوری که هنگام اثبات از راه «برهان خلف» به شکلی که عمداً غلط رسم شده است متوسل می‌شویم).

در فصلهای اول و سوم یک رشته مثالهائی با اثبات هندسی اشتباه، ذکر شده‌اند. در بارهٔ نوع اشتباهها ترجیح می‌دهیم بعداً، وقتی باآنها مواجه شدیم، از آنها صحبت کنیم. ولی از حالا باید خواننده را در جریان نوع اشتباههائی که هنگام اثبات قضیه‌ها صورت می‌گیرد قرار دهیم.

بین این قضیه‌ها به‌قضیه‌هائی برمی‌خوریم که نادرستی آنها بلافاصله برای خواننده روشن می‌شود. مثل «تساوی زاویه‌های قائمه و حاده». در اینگونه موارد نظر ما پنهان کردن اشتباه در نحوهٔ استدلال است. اثبات حکمهائی از این قبیل که به‌نادرستی صورت می‌گیرد از قدیم به‌«سفسطه» معروف بوده است. درمثالهای دیگر خواننده قبلاً متوجه درستی یا نادرستی قضیه نخواهد شد، مگر آنکه از قبل به‌آن آگاهی داشته باشد. در اینجا کار پیچیده‌تر می‌شود: باید هم ناسازگاری اثبات و هم اشتباه بودن حکم مورد بررسی قرار گیرد.[1]

بالاخره به ذکر مثالهائی می‌پردازیم که اشتباه بودن اثبات آنها از این امر ریشه می‌گیرد که قضیه‌ای که باید ثابت شود بهیچوجه توسط وسایلی که در دسترس اثبات کننده قرار دارد نمی‌تواند پی‌ریزی شود.

برای اینکه ببینیم چگونه چنین امری ممکن است پیش بیاید سعی می‌کنیم

۱ــ تحقیق اولی به تنهائی کافی نیست، زیرا ممکن است حکم درستی براساس نتیجهٔ غلطی نهاده شده باشد (مثلاً از تساوی نادرست ۱۲ = ۵ + ۳ ممکن است این حکم درست را نتیجه بگیریم که ۵ + ۳ عددی است زوج).

با ذکر مثالی دور از هندسه و بطور کلی دور از علم این مطلب را روشن سازیم.

شاید مسئلهٔ زیر را که جنبهٔ شوخی دارد شنیده باشیم: «یک کشتی در ′۱۵ ,°۴۲ عرض شرقی و ′۳۲ ,°۱۷ طول غربی قرار دارد (اعداد به دلخواه اختیار شده‌اند معمولاً یک رشته مفروضاتی هم که شرایط را پیچیده‌تر می‌سازند به آن اضافه می‌نمایند). سن ناخدا چقدر است؟». برای نیل به مقصود قسمتی از مسئله را تغییر می‌دهیم «آیا این حکم که ناخدا بیش از ۴۵ سال دارد درست است؟» همه می‌دانیم که از مفروضاتی که در مسئله داده شده چنین نتیجه‌ای نمی‌شود گرفت و هرگونه تلاشی برای اثبات حکمی که در بارهٔ سن ناخدا شده است به عدم موفقیت منجر می‌شود. به علاوه می‌توان ثابت کرد که اثبات این حکم غیرممکن است. زیرا در واقع ممکن است مسیر حرکت (که در مسئله هیچ اشاره‌ای به‌آن نشده) از راههائی که ازنقطهٔ جغرافیائی معینی‌می‌گذرد تشکیل شده باشد و در این مسیر ناخدا با فلان یا بهمان سن منسوب گردد (با این فرض که هدایت کشتی در چنین راهی هم برای ناخدای مسن و هم برای ناخدای جوان میسر باشد).

به عبارت دیگر ممکن است فرض کرد که ناخدا کمتر از ۴۵ سال دارد و بدیهی است این امر هیچگونه تضادی را با مفروضات مربوط به عرض و طول جغرافیائی پیش نمی‌آورد. موضوع دیگر، اگرچنانچه در شرایط مسئله مفروضات دیگری از قبیل نام کشتی و تاریخ دقیق حرکتش از نقطهٔ معینی ذکر شده بود، در آن صورت ممکن بود امیدی پیدا کرد که بتوان از روی مجله‌های دریانوردی نام شخص ناخدا و در نتیجه سن او را بدست آورد.

بنابراین احکامی وجود دارد که بسته به وسیله‌ای که برای اثبات آنها بکار می‌رود، اثبات صحت آنها ممکن یا غیر ممکن است.

حال به مسئله‌ای که به موضوع این کتاب نزدیکتر است برمی‌گردیم و می‌پرسیم: آیا درست است که مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۲ قائمه است؟

هردانش‌آموزی که مبحث خطوط موازی را خوانده باشد به اثبات این قضیهٔ مهم آگاهی دارد. ولی از تاریخ ۲۰۰۰ سالهٔ آن علهٔ کمی آگاهند. اثبات قضیه بر اساس خصوصیات زوایائی که از تلاقی یک خط با دو خط موازی حاصل‌می‌شود صورت می‌گیرد و این خصوصیات به‌نوبهٔ خود بر اصل به‌اصطلاح «توازی» متکی می‌باشد: از هر نقطهٔ واقع در بیرون یک خط فقط یک خط

می‌توان موازی با آن رسم کـرد.[1] از زمان اقلیدس تـا مدت ۲۰۰۰ سال سعی می‌شد از این اصل قضیه‌ای ساخته شود. یعنی فقط با اتکاء به قضیه‌هائی کـه در کتاب اقلیدس و کتابهـای درسی قبل از اصل توازی آمـده است اثبات گـردد، بطوری کـه مجاز نباشیم هیچ اصل دیگری بجای این اصل بگذاریم ولو اینکه محتویش مشابـه محتوی این اصل نباشد. کلیهٔ ایـن تلاشها بی‌ثمر مانده و فقط کشف شد کـه بجای اصل توازی فوق می‌توان بـه طریقه‌هـای مختلف اصلهای دیگری را قرار داد. بخصوص اگر یکی از خصوصیات زاویه‌هائی کـه از تلاقی یک خط با دو خط موازی پدید می‌آید یا خود قضیهٔ مجموع زاویه‌هـای یک مثلث را به عنوان اصل بگیریم در این صورت اصل تـوازی قبلی بصورت قضیه درمی‌آید. فقط در سالهای بیستم قرن گذشته بود که ریاضیدان بزرگ اهل قازان، نیکالای ایوانوویچ لوباچوسکی (۱۸۵۶-۱۷۹۲) موفق شد علت عدم کامیابی این تلاشها را کشف کند. این دانشمند نظریهٔ عمیق و پر وسعتی را پی‌ریزی کرد که من در اینجا قصد ندارم به آن اشاره‌ای کنم. در این نظریه اثبات عـدم امکان اثبات اصل توازی به آن نحوی که دانشمندان قبل از او (و دانشمندان زمان او) سعی داشتند اثبات کنند تلویحاً نهاده شده‌است. با وجودی که نظریهٔ لوباچوسکی و مسئلهٔ سن ناخدا از لحاظ پیچیدگی خیلی باهم فرق دارند، معهذا «اثبات عـدم امکان اثبات» در هردو مورد، طبیعت یکسانی دارنـد: در ضمن مثالهای محسوس («قالبها») روشن می‌شود کـه می‌توان دو حکم کاملاً متضاد چنان پیدا کرد کـه مفروضات اولیهٔ واحد و منحصری در هردوی آنهـا صدق کند. معنی ایـن مطلب برای اصل مورد نظر ما این است که: صحت یا عدم صحت حکمی کـه در اصل توازی وجود دارد به‌هیچوجه از احکامی که در هندسهٔ معمولی قبل از آن آمده‌اند نتیجه نمی‌شود.

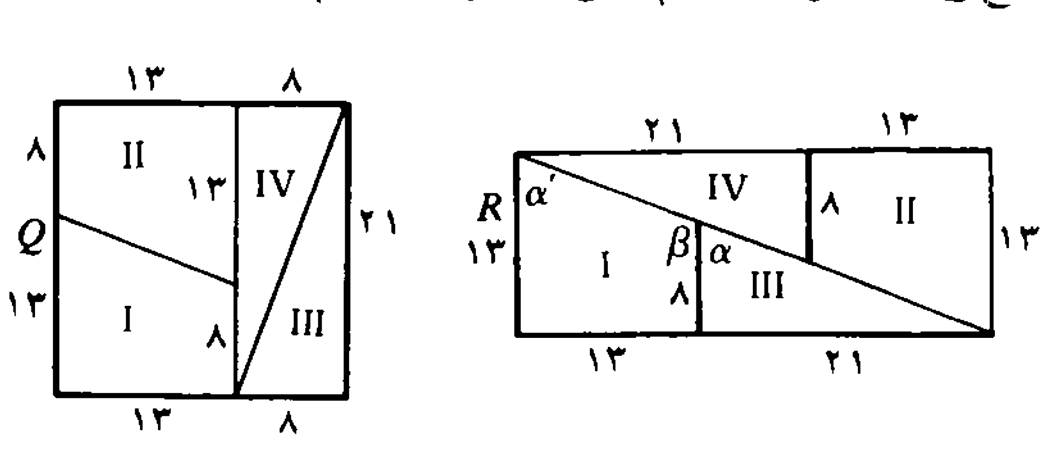
اکنون می‌دانیم کـه با توسل به قضیه‌هـائی کـه فقط قبل از اصل توازی آمده‌اند هرنوع اثباتی ازاصل توازی یا هر اثبات هم‌ارز با آن اشتباه خواهد بود.

۱ـ توجه خواننده را به ایـن امـر جلب می‌کنیم کـه خصوصیت «اصل موضوعی» این حکم با کلمهٔ «فقط» بیان می‌شود. این امر کـه می‌توان یـک خط موازی رسم کرد قبلاً بر اساس قضیهٔ «دو خط عمود بر یـک خط باهم مـوازیند» ثابت می‌شود.

۱ اشتباهاتی که در استدلالهای افراد تازه‌کار پیش می‌آید

مثال ۱. مساحت مربع به ضلع ۲۱ سانتیمتر برابر است با مساحت مستطیل به اضلاع ۳۴ سانتیمتر و ۱۳ سانتیمتر.

مربع Q را به دو مستطیل با اندازه‌های ۱۳ × ۲۱ و ۸ × ۲۱ تقسیم می‌کنیم (شکل ۱)؛ مستطیل اول را به دو ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ مساوی به قاعده‌های ۱۳ و ۸ و مستطیل دوم را به دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی با اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ ۸ و ۲۱ تقسیم می‌کنیم. از این چهار قسمتی که بدست می‌آید مستطیل R را طبق آنچه در شکل ۱ نشان داده شده است، می‌سازیم (قسمتهای مساوی، مربع Q و مستطیل R با ارقام رومی مشخص شده است).



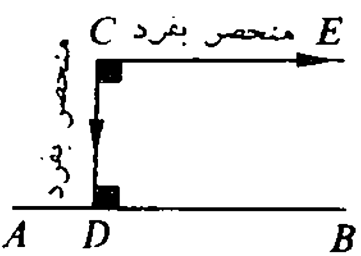
شکل ۱

ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ I و مثلث قائم‌الزاویهٔ III را پهلوی هم چنان قرار می‌دهیم که ضلعهای ۸ سانتیمتری مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آنها رویهم وضلعهای دوم مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آنها در امتداد هم قرار گیرند و به این ترتیب مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دهند که اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه آن به ترتیب مساوی ۱۳ و ۳۴ = ۲۱ + ۱۳ باشد. به همین ترتیب به‌کمک ذوزنقهٔ II ومثلث IV، مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری می‌سازیم؛ و بالاخره به کمک دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که به دست می‌آید، مستطیل R را به اضلاع ۱۳ و ۳۴ درست می‌کنیم. مساحت این مستطیل مساوی ۱۳ × ۳۴ یعنی ۴۴۲ سانتیمتر مربع می‌شود، در حالیکه مساحت مربع Q، که از همین قسمتها درست شده است، مساوی ۲۱ × ۲۱ یعنی ۴۴۱ سانتیمتر مربع است. این یک سانتیمتر مربع ازکجا افتاده است؟

بهتر است خود شما این مسئله را تجربه کنید: از کاغذ (که بهتراست قبلاً با خط‌کشی به مربعهای یک سانتیمتر مربعی تقسیم شده باشد) مربع Q را ببرید، آنرا با دقت به چهار قسمت مورد نظر تقسیم کنید و سپس از قسمتهای به دست آمده مستطیل R را بسازید.

مثال ۲. اثبات اصل توازی

خط راست AB و نقطهٔ C واقع در خارج آن مفروض است؛ ثابت می‌کنیم که از نقطهٔ C تنها یک خط می‌توان به موازات AB رسم کرد. از نقطهٔ C عمود CD را بر خط AB فرود می‌آوریم (شکل ۲؛ در اینجا و در اغلب شکلهای بعدی زاویه‌های قائمه را بامربع کوچک سیاه مشخص کرده‌ایم)؛ از همین نقطهٔ C عمود CE را بر CD اخراج می‌کنیم. واضح است که این خط CE با AB موازی است، زیرا هر دو بر یک خط (خط CD) عمودند (متذکر می‌شویم که استفاده از قضیهٔ دو خط عمود بر یک خط باهم موازیند، مانعی ندارد، زیرا این قضیه قبل از اصل توازی، و بدون آن، قابل اثبات است). ازطرف دیگرمی‌دانیم که از یک نقطه (روی خط مفروض یا خارج آن) تنها یک خط می‌توان عمود بر خط مفروض رسم کرد (این قضیه هم بدون استفاده از اصل توازی قابل اثبات است)، بنابراین نتیجه می‌شود که خط CE

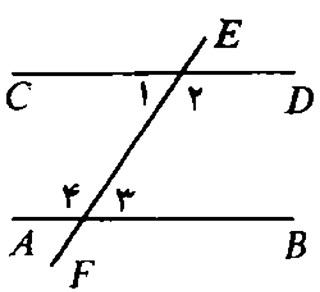


شکل ۲

منحصر به فرد است .

مثال ۳. اگر خطی دو خط موازی را قطع کند، مجموع دو زاویهٔ متقابل داخلی‌که تشکیل می‌دهند مساوی $۲d$ می‌شود ($d = ۹۰^\circ$) (اثبات بدون استفاده از اصل توازی) .

فرض کنیم $AB \parallel CD$ باشد و خط EF آنها را قطع کرده باشد (شکل ۳)؛ زوایای داخلی را به وسیلهٔ اعداد مشخص کرده‌ایم . سه فرض امکان دارد[1] :


شکل ۳

۱) مجموع زوایای متقابل داخلی از $۲d$ بزرگتر است.

۲) مجموع زوایای متقابل داخلی از $۲d$ کوچکتر است.

۳) مجموع زوایای متقابل داخلی مساوی $۲d$ است.

طبق فرض اول داریم :

$$\widehat{۱} + \widehat{۴} > ۲d \,,\; \widehat{۲} + \widehat{۳} > ۲d$$

و از آنجا:

$$\widehat{۱} + \widehat{۲} + \widehat{۳} + \widehat{۴} > ۴d$$

از طرف دیگر واضح است که مجموع چهار زاویهٔ داخلی مساوی $۴d$ است (مجموع دو جفت زوایای مجانب). این تناقض نشان می‌دهد که فرض اول ممکن نیست. به همین ترتیب ثابت می‌شود که فرض دوم هم ممکن نیست، زیرا در اینحالت مجموع چهار زاویهٔ داخلی کوچکتر از $۴d$ به دست می‌آید. تنها فرض سوم باقی می‌ماند که منجر به تناقض نمی‌شود و بنابراین قضیه ثابت

---

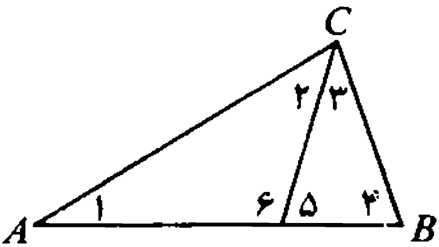
۱. وقتی که در اینجا و بعداً از فرضها یا حالتهای ممکن صحبت می‌کنیم، اثبات نمی‌کنیم که آیا واقعاً همهٔ این حالتها (با توجه به شرایط مسئله) می‌تواند وجود داشته باشد یا نه. برعکس ممکن است فرضی‌را که به عنوان یکی ازحالتهای ممکن در نظر گرفته‌ایم، به نتیجهٔ نامعقولی منجرشود، یعنی شرایط مسئله را نقض کند، درست‌مثل مواردی که با «برهان‌خلف» استدلال می‌کنیم. به‌این ترتیب منظور از حالتهای‌ممکن، تمام آن حالتهائی است که در بدو امر وبدون درنظر گرفتن سایر شرایط بنظر می‌رسد.

می‌شود .

مثال ۴. مجموع زوایای مثلث مساوی ۲ قائمه است (اثبات متکی بر اصل اقلیدس نیست).

مثلث دلخواه ABC را به وسیلهٔ خطی که از یک رأس آن می‌گذرد، به دو مثلث تقسیم می‌کنیم: زوایا در شکل ۴ به وسیلهٔ اعداد مشخص شده است. مجموع زوایای هر مثلث را x فرض می‌کنیم، در اینصورت داریم :

$$\begin{cases} \widehat{۱} + \widehat{۲} + \widehat{۶} = x \\ \widehat{۳} + \widehat{۴} + \widehat{۵} = x \end{cases}$$



شکل ۴

که از مجموع آنها به دست می‌آید :

$$\widehat{۱} + \widehat{۲} + \widehat{۳} + \widehat{۴} + \widehat{۵} + \widehat{۶} = ۲x$$

ولی مجموع $\widehat{۱} + \widehat{۲} + \widehat{۳} + \widehat{۴}$، مجموع زوایای مثلث ABC یعنی مساوی x است و مجموع زوایای $\widehat{۵}$ و $\widehat{۶}$ (که دو زاویه مجانبند) مساوی $۲d$ است. بنابراین برای محاسبهٔ x به معادلهٔ $x + ۲d = ۲x$ می‌رسیم که از آنجا $x = ۲d$ به دست می‌آید.

مثال ۵. مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای آن مساوی $۲d$ است (اثبات بدون استفاده از اصل توازی داده شده است).

در قرن هیجدهم و ابتدای قرن نوزدهم، بعضی از ریاضیدانها کوشش کردند ثابت کنند که می‌توان بدون تکیه بر اصل توازی دربارهٔ مجموع زوایای مثلث صحبت کرد. ثابت شده بود که مجموع زوایای یک مثلث نمی‌تواند بیشتر از $۲d$ باشد، بنابراین سه حالت ممکن باقی می‌ماند: ۱) مجموع زوایای مثلث همیشه (یعنی برای همه مثلثها) مساوی $۲d$ است . ۲) مجموع زوایای مثلث همیشه کوچکتر از $۲d$ است، ۳) مجموع زوایای مثلث گاهی کوچکتر از $۲d$ و گاهی مساوی $۲d$ است. در اینجا ثابت می‌کنیم که حالت سوم ممکن نیست و به این ترتیب کافی خواهد بود که نشان دهیم لااقل یک مثلث وجود دارد که مجموع زوایای آن مساوی $۲d$ است. یکی از این کوششها را در اینجا خواهیم آورد؛ در اینصورت احتیاجی به اصل توازی نخواهد بود.

چون مجموع زوایای یک مثلث از $۲d$ تجاوز نمی‌کند، ABC را مثلثی می‌گیریم (شکل ۴) که مجموع زوایای آن حداکثر مقدار ممکن باشد (اگر چندتا ازاین مثلثها وجود داشته باشد، یکی ازآنها را انتخاب می‌کنیم) و مجموع زوایای آنرا α می‌گیریم. به این ترتیب در مثلثهای دیگر مجموع زوایای مثلث از α تجاوز نمی‌کند، به این ترتیب (با توجه به‌شکل ۴) داریم:

$$\widehat{۱}+\widehat{۲}+\widehat{۶}\leqslant\alpha \quad , \quad \widehat{۳}+\widehat{۴}+\widehat{۵}\leqslant\alpha$$

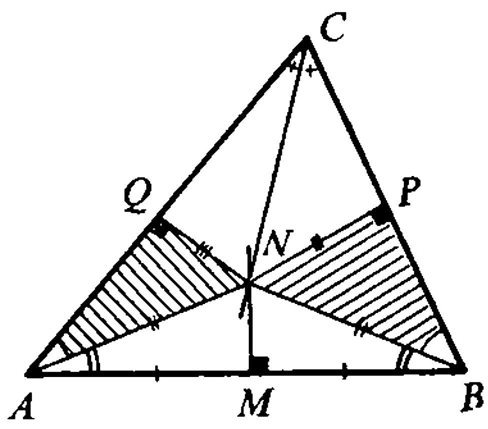
ازآنجا $\widehat{۱}+\widehat{۲}+\widehat{۳}+\widehat{۴}+\widehat{۵}+\widehat{۶}\leqslant ۲\alpha$؛ ولی طبق فرض داریم: $\widehat{۱}+\widehat{۲}+\widehat{۳}+\widehat{۴}=\alpha$ وعلاوه بر آن $\widehat{۵}+\widehat{۶}=۲d$؛ بنابراین $\alpha+۲d\leqslant ۲\alpha$ و یا $۲d\leqslant\alpha$. و چون α نمی‌تواند از $۲d$ بیشتر باشد، به دست می‌آید: $\alpha=۲d$، یعنی مجموع زوایای مثلث ABC برابراست با $۲d$.

مثال ۶. همهٔ مثلثها متساوی‌الساقینند.

ABC را مثلث غیرمشخصی می‌گیریم (شکل ۵ یا ۶ یا ۷)؛ نیمساز زاویهٔ C و سپس محور تقارن ضلع AB (یعنی عمود منصف پاره خط AB) را رسم می‌کنیم و حالتهای مختلف وضع این دو خط را درنظر می‌گیریم؛ چون تنها یک نیمساز و یک عمود منصف را در مثلث رسم کرده‌ایم، از این ببعد آنها را بطور ساده «نیمساز» و «محور» می‌نامیم.

حالت ۱: نیمساز و محور یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی موازی و یا منطبقند. چون محور بر AB عمود است، نیمساز هم بر AB عمود، یعنی بر ارتفاع منطبق می‌شود و می‌دانیم که در این حالت، مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($CA=CB$).

حالت ۲: نیمساز و محور در داخل مثلث ABC، و مثلاً در نقطهٔ N، یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۵). از N دو عمود بر ضلعهای CB و CA فرود می‌آوریم و پاره خطهای NB و NA را وصل می‌کنیم. چون N روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، داریم: $NP=NQ$. ولی در عین حال نقطهٔ N از دونقطهٔ A و B هم به یک فاصله است، یعنی $NB=NA$. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ NPB و NQA در وتر ویک ضلع مساوی می‌شوند و بنابراین بدست می‌آید: $N\widehat{A}Q=N\widehat{B}P$. از طرف دیگر در مثلث متساوی‌الساقین NAB داریم:



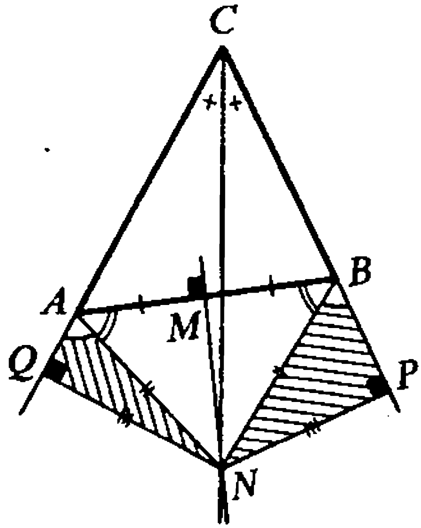
شکل ۵

$N\widehat{A}B = N\widehat{B}A$ و بنابراین خواهیم داشت: $C\widehat{A}B = C\widehat{B}A$، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است (یعنی $CA = CB$).

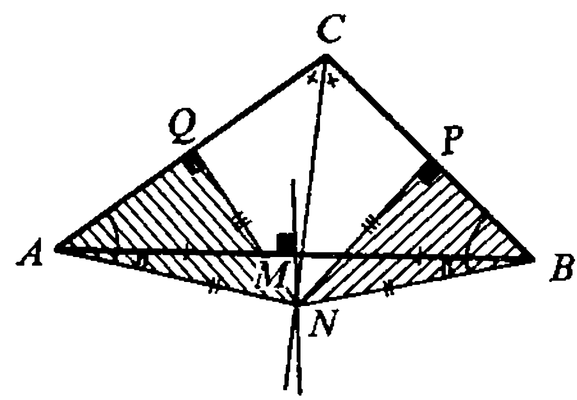
حالت ۳: نیمساز و محور روی ضلع AB یکدیگر را قطع می‌کنند، که طبعاً این نقطهٔ تلاقی در M وسط AB خواهد بود. در این حالت نیمساز زاویهٔ C بر میانهٔ وارد بر ضلع AB منطبق می‌شود و بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است.

تبصره. خواننده را از یک اشتباه احتمالی برحذر می‌داریم. می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین میانه و نیمساز برهم منطبقند، ولی ما در اینجا از حکم عکس استفاده کردیم: «اگر در مثلثی میانه و نیمسازی که از یک رأس می‌گذرند، برهم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الساقین است». البته این قضیهٔ عکس هم صحیح است، منتها چون ممکن است اثبات آن برای خواننده مشکل باشد، یکی ازانواع اثبات آنرا می‌آوریم. فرض می‌کنیم در مثلث ABC پاره خط CM هم میانه و هم نیمساز باشد. از نقطهٔ M عمودهای MP و MQ را بر اضلاع CB و CA فرود می‌آوریم (می‌توان از شکل ۵ استفاده کرد، در آنجا باید M و N را منطبق برهم در نظر گرفت که در اینصورت پاره خط MN حذف می‌شود)، مثلثهای قائم‌الزاویه مساوی MPB و MQA به دست می‌آید و از تساوی زاویه‌های MBP و MAQ نتیجه می‌گیریم‌که مثلث ABC متساوی‌الساقین است. حالا باید ثابت کنیم که نقاط P و Q بر اضلاع CB و CA، ونه برامتداد آنها، قرار دارند. در غیراینصورت استدلال کامل نخواهد بود. یکی از این نقاط، در

حالتی که A یا B منفرجه باشد، بر امتـداد ضلع مربوطه قرار می‌گیرد. مثلاً فرض می‌کنیم که زاویهٔ B منفرجه باشد، در اینصورت نقطهٔ P بر امتداد ضلع CB قرار می‌گیرد و بـه دست می‌آید: $M\widehat{A}Q = M\widehat{B}P$، ولی این تساوی ممکن نیست، زیرا یکی از این دوزاویه برای مثلث ABC داخـلی و دیگری خارجی و غیرمجانب آنست.



شکل ۷



شکل ۶

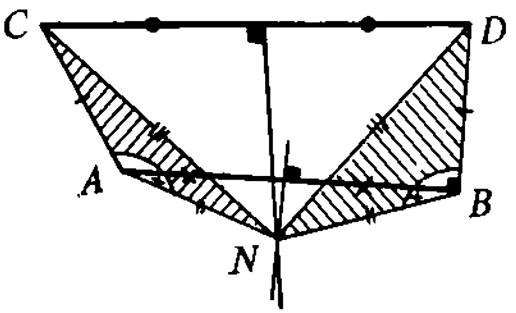
حالت $a۴$: نیمساز و محور در خـارج مثلث ABC یکدیگـر را قطـع می‌کنند؛ پای عمودهائی که ازنقطهٔ N، محل تلاقی نیمساز و محور، بر اضلاع CB و CA فرود می‌آوریم بر خود این اضلاع قرار می‌گیرند (شکل ۶) و نه بـر امتداد آنها. شبیه حالت قبل مثلثهای NPB و NQA باهم برابر ومثلث ANB متساوی‌الساقین می‌شود. زوایـای مجاور به قاعدهٔ AB از مثلث ABC به عنوان تفاضل زوایای متنـاظر مساوی (و نه مثل حالت ۲ مجموع آنها) با هـم مساوی می‌شوند.

حالت $b۴$: نیمساز و محـور در خـارج مثلث ABC یکـدیگر را قطع می‌کنند؛ پای عمودهائی که ازنقطهٔ N، محل تلاقی نیمساز و محور، بر اضلاع CB و CA فرود می‌آوریم بر امتداد این اضلاع قرار می‌گیرند (شکل ۷). دراین حالت هـم، استدلال منجر به تساوی زوایای خارجی رأسهای A و B در مثلث ABC می‌شود که از آنجـا نتیجه می‌شود زوایای داخلی A و B هم برابرند و

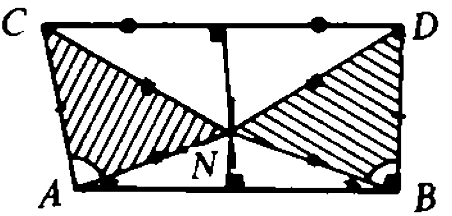
بنابراین $CA = CB$.

مثال ۷. زاویهٔ قائمه برابر است با زاویهٔ منفرجه.

از دو انتهای پاره‌خط AB (شکل ۸ یا ۹) دو پاره‌خط مساوی AC و BD را چنان رسم می‌کنیم که در یکطرف خط AB واقع باشند و با آن زاویهٔ قائمهٔ DBA و زاویهٔ منفرجهٔ CAB را بسازند؛ ما هم می‌خواهیم تساوی همین دو زاویه را ثابت کنیم. با وصل C و D به یکدیگر، چهار ضلعی $ABCD$ به دست می‌آید که در آن دو ضلع AC و BD مساوی و غیرموازیند، همچنین



شکل ۹



شکل ۸

دو ضلع AB و CD هم نمی‌توانند موازی باشند (زیرا درغیر اینصورت چهار-ضلعی به صورت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی در می‌آید که زوایای مجاور به قاعدهٔ آن باهم برابر نیست). عمود منصفهای دو ضلع AB و CD را رسم می‌کنیم؛ چون این دو خط موازی نیستند عمود منصفهای آنها موازی یا منطبق نمی‌شوند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند N قطع می‌کنند. دو حالت پیش می‌آید:

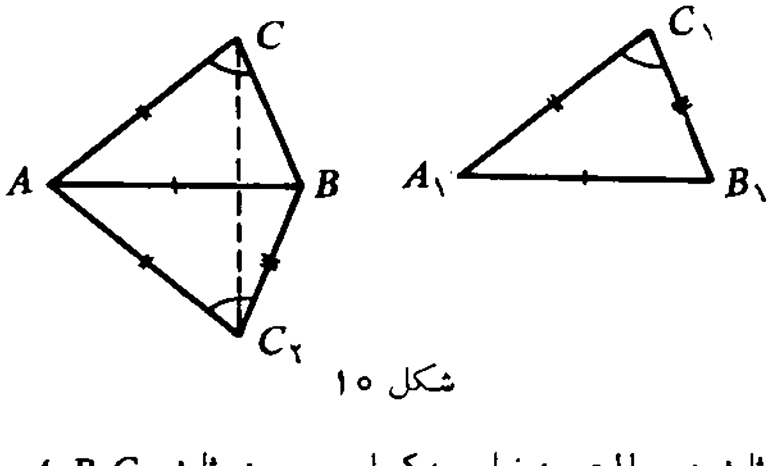
حالت ۱: نقطهٔ N بالای خط AB قرار دارد، به عبارت دیگر نقطهٔ N در طرفی از خط AB قرار دارد که چهار ضلعی $ABDC$ قرار گرفته است (شکل ۸ را ببینید که در آنجا نقطهٔ N در داخل چهار ضلعی قرار گرفته است). این نقطه را به همهٔ رئوس چهارضلعی وصل می‌کنیم؛ چون نقطهٔ N از دو انتهای پاره‌خط AB و هم از دو انتهای پاره‌خط CD به یک فاصله است، مثلثهای NAC و NBD درسه‌ضلع برابرند. ازآنجا نتیجه می‌شود: $N\widehat{AC} = N\widehat{BD}$. اگر به زاویهٔ اول زاویهٔ NAB و به زاویهٔ دوم زاویهٔ NBA را اضافه کنیم، با توجه به تساوی دو زاویهٔ NAB و NBA، به تساوی $C\widehat{AB} = D\widehat{BA}$ می‌رسیم.

حالت ۲: نقطهٔ N بر AB واقع است، که البــته در اینصورت بر وسط AB قــرار می‌گیرد. استــدلال قبلی ساده‌تر می‌شود و تساوی $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$ مستقیماً از تساوی مثلثهای NAB و NBD به دست می‌آید.

حالت ۳: نقطهٔ N زیر خط AB قرار دارد، یعنی نقطهٔ N در طــرفی که چهار ضلعی $ABDC$ واقع است، قرار نگرفته است (شکل ۹). دوباره از تساوی مثلثها به دست می‌آید. $\widehat{NAC} = \widehat{NBD}$، ولی دراینجا بایــد ازاین دو زاویه، زوایــای NAB و NBA را (که با هــم برابرند) کم کرد؛ در نتیجــه تساوی $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$ به دست می‌آید.

مثال ۸. اگر دو ضلع و زاویهٔ روبرو به یکی از آنها در مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ متناظر آنها در مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث برابرند.

در مورد مثلثهــای ABC و $A_1B_1C_1$ (شکل ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲) فــرض می‌کنیم: $AB = A_1B_1$، $AC = A_1C_1$، $\widehat{C} = \widehat{C_1}$؛ ثابت می‌کنیم دو مثلث برابرند. برای این منظــور از روشی استفاده می‌کنیم کــه معمولاً برای اثبــات

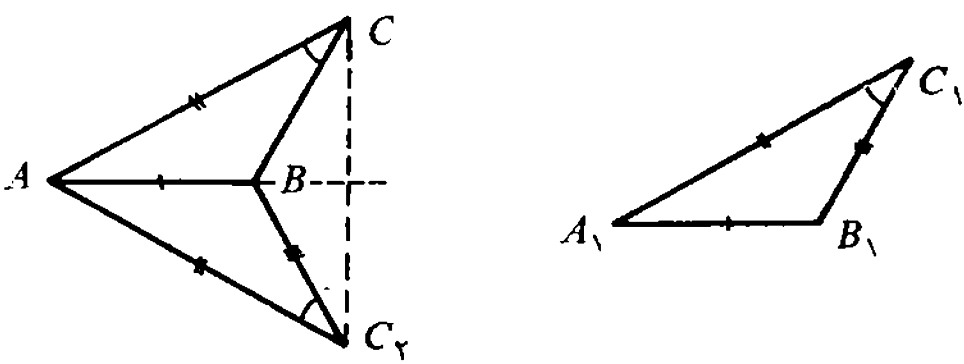


شکل ۱۰

تساوی دو مثلث در حالت سه ضلع به‌کــار می‌رود: مثلث $A_1B_1C_1$ را بر مثلث ABC چنــان قرار می‌دهیم کــه دو ضــلع مساوی AB و A_1B_1 (دو ضلعی کــه زوایای روبروی‌آنها باهم برابر است) برهم قرار گیرد (A بر A_1 و B بر B_1)؛ ومثلث $A_1B_1C_1$ به وضع ABC_2 درآید. نقاط C و C_2 را بهم وصل می‌کنیم، سه حالت پیش می‌آید:

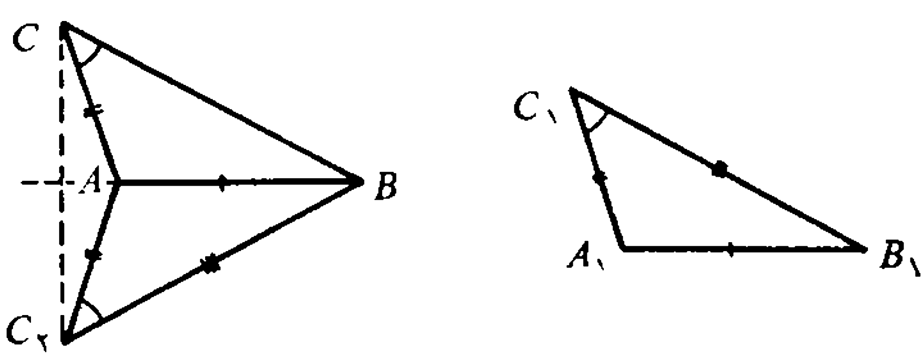
حالت ۱: خط CC_2 ضلع AB را در داخل‌آن قطع می‌کند (شکل ۱۰).

مثلث $ACC_۲$ متساوی‌الساقین است، بنابراین $A\widehat{C}C_۲ = A\widehat{C_۲}C$؛ اگر این دو زاویهٔ مساوی را از زوایای مساوی ACB و $AC_۲B$ کم کنیم به تساوی $B\widehat{C}C_۲ = B\widehat{C_۲}C$ می‌رسیم. تساوی اخیر نشان می‌دهد که مثلث $CBC_۲$ متساوی‌الساقین است و داریم: $CB = C_۲B$، یعنی $C_۱B_۱ = CB$ ودو مثلث ABC و $A_۱B_۱C_۱$ در سه ضلع برابر می‌شوند.



شکل ۱۱

حالت ۲: خط $CC_۲$ امتداد ضلع AB را در طرف B قطع می‌کند (شکل ۱۱). استدلال شبیه حالت قبل است، تنها در اینجا باید زوایای مساوی ACB و $AC_۲B$ را از دو زاویهٔ مساوی $ACC_۲$ و $AC_۲C$ کم کرد.

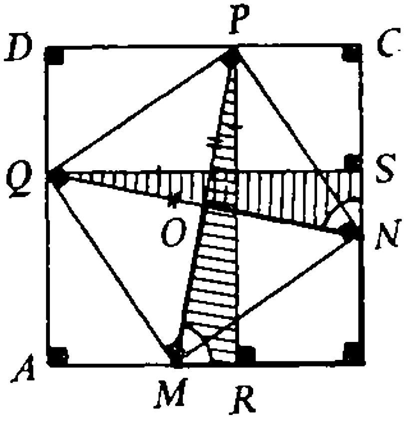


شکل ۱۲

حالت ۳: خط $CC_۲$ امتداد ضلع AB را در طرف A قطع می‌کند (شکل ۱۲). باز هم استدلال شبیه حالت ۱ است، تنها در اینجا باید زوایای

مساوی ACC_2 و AC_2C را به دو زاویهٔ مساوی ACB و AC_2B اضافه کرد.

مثال ۹. هرمستطیل محاط در مربع ، یک مربع است . به عبارت دیگر: اگر مستطیل $MNPQ$ را در مربع $ABCD$ (شکل ۱۳) چنان محاط کنیم که هر رأس مستطیل بر یک ضلع مربع قرار گیرد (در شکل ۱۳، M بر AB، N بر BC، P بر CD، Q بر DA)، در اینصورت این مستطیل محاطی یک مربع است.



شکل ۱۳

برای اثبات، عمودهای PR و QS را از P و Q به ترتیب بر AB و BC فرود می‌آوریم. این دو عمود باهم برابرند، زیرا هرکدام از آنها مساوی با ضلع مربع $ABCD$ است. دو مثلث قائم‌الزاویه PRM و QSN در وتر و یک ضلع باهم برابرند: $PR = QS$، $PM = QN$ (PM و QN قطرهای مستطیل $MNPQ$ هستند). در نتیجه به دست می‌آید:

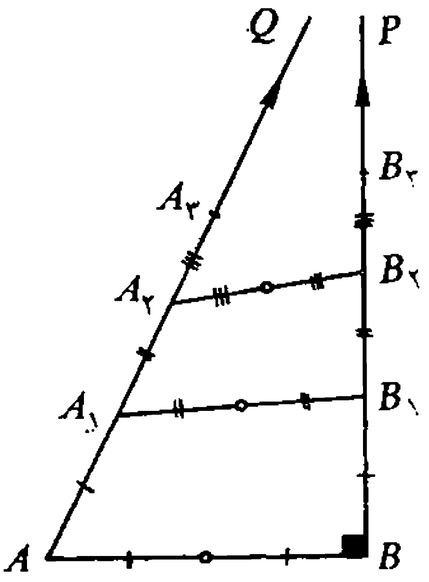
$$P\widehat{M}R = Q\widehat{N}S$$

حالا چهارضلعی $MBNO$ را در نظر می‌گیریم (O محل تلاقی قطرهای مستطیل $MNPQ$ است)؛ دراین چهارضلعی، زاویهٔ خارجی رأس N برابراست با زاویهٔ داخلی رأس M، یعنی مجموع زوایای داخلی رأسهای M و N مساوی $2d$ (دو قائمه) است . بنابراین باید مجموع دو زاویهٔ داخلی B و O از این چهارضلعی نیز مساوی دو قائمه شود ، ولی یکی ازاین دو زاویه، یعنی زاویهٔ B، قائمه است، بنابراین زاویهٔ O هم قائمه می‌شود، یعنی قطرهای مستطیل $MNPQ$ برهم عمودند و در نتیجه این مستطیل مربع است.

مثال ۱۰. خط عمود و خط مایل نسبت به یک خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند. این استدلال سفسطه‌آمیز با بعضی تغییرات، متعلق به پروکلوس ریاضی‌دان یونانی است (قرن پنجم میلادی) حکم‌را دقیقتر بیان می‌کنیم: درنقاط A و B از خط AB (شکل ۱۴) و در یک طرف آن دو نیم خط رسم می‌کنیم (جهت این نیم‌خطها روی شکل به کمک پیکان نشان داده شده است): AQ که

با خط AB زاویهٔ حاده می‌سازد و BP که بر آن عمود است؛ ثابت می‌کنیم که این دو نیم‌خط یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

پاره‌خط AB را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و روی هر یک از نیم‌خطهای AQ و BP به اندازهٔ $\frac{1}{2}AB$ جدا می‌کنیم؛ به این ترتیب $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB$. عمود و مایل نمی‌توانند روی پاره‌خطهای AA_1 و BB_1 یکدیگر را قطع کنند، یعنی پاره‌خطهای AA_1 و BB_1 نقطهٔ مشترکی ندارند. درحقیقت اگر AA_1 و BB_1 نقطهٔ مشترکی مثل K داشته باشند، مثلث AKB به دست می‌آید که در آن مجموع دو ضلع $(AK + KB)$ کوچکتر از ضلع سوم (AB) و یا مساوی آنست که ممکن نیست. نقاط A_1 و B_1 را به هم وصل می‌کنیم و ساختمان قبل را تکرار می‌کنیم: از نقاط A_1 و B_1 روی هر یک از نیم‌خطهای AQ و BP (درجهت این نیم‌خطها) به اندازهٔ $\frac{1}{2}A_1B_1$ جدا می‌کنیم، به دست



شکل ۱۴

می‌آید: $A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1B_1$. در این مورد هم پاره‌خطهای A_1A_2 و B_1B_2 نمی‌توانند نقطهٔ مشترکی داشته باشند و به خصوص نقاط A_2 و B_2 نمی‌توانند برهم منطبق شوند. حالا پاره‌خط A_2B_2 را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و پاره‌خطهای $A_2A_3 = B_2B_3$ را مساوی $\frac{1}{2}A_2B_2$ جدا می‌کنیم و غیره (باید توجه کرد که پاره‌خطهای مساوی

$$A_nA_{n+1} = B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}A_nB_n$$

را هر بار روی پاره‌خطها در جهت تعیین شده جدا می‌کنیم و بنابراین نمی‌تواند

مانعی به وجود آید). جریان تقسیم بدون وقفه ادامه می‌یابد؛ ادامهٔ کار تنها وقتی متوقف می‌شود که پاره‌خط A_nB_n مساوی صفر شود، یعنی نقاط A_n و B_n برهم منطبق شوند و این وضع هم، همانطور که دیدیم نمی‌تواند پیش‌آید (عدم امکان انطباق دو نقطهٔ A_n و B_n از اینجا معلوم می‌شود که در صورت انطباق، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به دست می‌آید که در آن وتر AA_n با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ BB_n مساوی می‌شود). به این ترتیب در هر مرحلهٔ این ساختمان (که می‌تواند تا بی‌نهایت مرتبه ادامه یابد)، عمود و مایل یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی این تقاطع هرگز پیش نمی‌آید.

*

در مقابل ما یک رشته استدلال وجود دارد که با توجه به هندسهٔ درسی، هیچ تردیدی در مورد آنها نمی‌توان داشت. در بعضی موارد از این استدلالها، در جهت اثبات یک نوع خامی به نظر می‌رسد، و در بقیه نادرستی اثبات مستقیماً معلوم نمی‌شود، ولی در همهٔ مثالها خواننده از قبل می‌داند که اشتباهی در استدلال وجود دارد. حالا وقت آن رسیده است که این اشتباهات پیدا شود.

از خواننده مصرانه می‌خواهیم که قبل از مراجعه به فصل دوم به تجزیه و تحلیل همهٔ این مثالها بپردازد و کوشش کند خود اشکالات آنها را پیدا کند. چه بسا که خواننده نتواند در هیچیک از موارد یا در بعضی موارد موفق شود و یا نتواند بطور کامل اشکال را پیدا کند؛ ولی حتی اگر به نتیجه‌ای هم نرسد، کار قبلی او می‌تواند آمادگی ذهنی لازم را برای فهم آنچه که درفصل دوم آمده است فراهم کند. وقتی هم که در موردی موفق به کشف خطای استدلال بشود، مراجعهٔ او به فصل دوم نحوهٔ کار و روش استدلال اورا تأیید و یا دقیق خواهد کرد. از آنجا که احتمالاً خوانندهٔ این کتاب تجربهٔ قبلی در اینگونه موارد نداشته باشد، توصیه‌هائی به او می‌کنیم:

۱ــ رد یک اثبات هندسی به معنای پیدا کردن یک اشتباه منطقی در آن است. اشکال کار در اینست که استدلال تقریباً در همه جا صحیح است، منتها دارای نقصی است که باید کشف شود.

۲ــ تجزیه و تحلیل دقیق استدلال، اکثر منجر به این نتیجه می‌شود که «شکل صحیح نیست». ولی این یک راه کاملاً موفقیت‌آمیز نیست و تقریباً در همهٔ موارد نمی‌توان خود را به آن محدود کرد. وقتی گفته می‌شود که شکل A

صحیح نیست و بـه جای آن باید شکل B را رسم کرد معمولاً بـه این معناست که : در استدلال تمام حالتهای ممکن در نظر گرفته نشده است (و این یک اشتباه منطقی است!)، و به‌خصوص در شکل A وضعی در نظـر گرفته شده است کـه شرایط قضیـه را نقض می‌کند و اوضـاعی از شکل (شکل B) کـه با شرایـط قضیه تطبیق می‌کند، حذف شده است. بـه این ترتیب سرچشمهٔ اشتباه مربوط به شکل نیست ، بلکه مربوط به نقص حالتهای ممکنه‌ای است که دربارهٔ آنها بحث شده است .

۳ـ اگر در حـالت شکل A نتیجهٔ نامعقولی به دست آمـده است، کافی است ثابت کنیم که در شکل B چنین نتیجه‌ای به دست نمی‌آید، کـه در حقیقت اثبات غیرمستقیم عدم‌امکان حالت A است. البته بهتراست (ولی اجباری نیست!) ثابت کنیم که شرایط قضیه منجر به وجود شکل حالت B می‌شود.

۴. اگرچـه شکل نمی‌تواند بخـودی خود درستی یا نادرستی قضاوت را کشف کند، معهذا رسم هرچـه دقیق‌تر شکل (بـه کمک وسائل رسم) می‌توانـد راهنمائی بـرای کشف اشتباه بشود. وقتی که با نتیجـهٔ بکلی نامعقولی روبـرو هستید، بهتر است شکل را چنان رسم کنید که به روشنی غلط بودن نتیجه را نشان دهد، مثلاً در مثال ۷ زاویهٔ منفرجه را نزدیک به ۱۸۰ درجـه رسم کنید و یا در مثال ۱۰ عمود و مـایل را چنان بکشید که در حدود شکل یکدیگر را قطع کرده باشند و غیره. چنین شکلی می‌تواند جهت جستجوی اشتباه را نشان دهد .

۵ـ در بعضی موارد، اشتبـاه هیچگونه ارتباطی بـه شکل ندارد و مثـلاً مربوط به اینست که ازیک حکم نادرست (که شباهت به‌یک حکم صحیح دارد) استفاده شده است .

۶ـ وقتی معلوم نیست کـه آیـا حکم اثبات شده صحیح است یانه، بهتر است (ولی اجباری نیست) که قبلاً آنرا روشن کنیم. باید بخاطر داشت که اگر حتی یک مثال پیـدا کنیم که حکم مربوطـه را نقض کنـد ، توانسته‌ایم آنـرا رد کنیم.

با توجه به این نکات خواننده می‌تواند به مثالها بپردازد، سپس به فصل دوم مراجعه کند و دوباره پیش خود به تجزیه و تحلیل دقیق آنها مشغول شود.

۲

تجزیه و تحلیل مثالهای فصل اول

دربارهٔ مثال ۱. وقتی حکم کردیم که ازقسمتهای I، II، III و IV مربوط به مربع می‌توان مستطیلی درست کرد، به چشم خود و یا بـه تجربه‌ای که انجام دادیم (با کاغذهای بریده) اعتماد کردیم. ضمن اینکه شکلهـای I و III (یا II و IV) را پهلوی هم قرار دادیم، قبول کردیم که مثلثی به‌وجود می‌آید، یعنی قبول کردیم که ساق مایل ذوزنقهٔ I و وتر مثلث III در امتـداد هم قرار می‌گیرند و در نقطهٔ مشترک خود «شکستگی» ایجاد نمی‌کنند. البته اینکه ما روی شکل یا روی الگوئی کـه از کاغذ ساخته‌ایم، شکستگی نمی‌بینیم، نمی‌تواند دلیل قـانع کننده باشد: حتی اگر دربارهٔ خطای باصره دقت کنیم، مربوط به نمونه‌هـای فیزیکی شکلها می‌شود نه شکلهای هندسی، و روشن است کـه نمی‌تواند به‌عنوان اثبات هندسی مورد قبول واقع شود[1].

کشف همین نقص برای نارسائی اثبات کافی است وتا وقتی که این نقص

---

۱. باید گفت کـه این اشتبـاه ریشهٔ تاریخی عمیقی دارد و خیـلی طول کشید تا استدلال هندسی به مفهوم واقعی خود بـه وجود آمد. ضمن کاوشهائی که در معبدی از هند قدیم انجام گرفته است (و مربوط به ۱۰۰۰ سال قبل از میلاد است) بعضی نوشته‌هـای ریاضی کشف شده است که از آنجمـله یک شکل هندسی است که بر دیوار معبـد نقش بسته است. شکل مربوط بـه قاعدهٔ محاسبهٔ مساحت دایره است؛ بجای اثبات در نزدیکی شکل نوشته شده است «دیده می‌شود».

برطرف نشود، حتی بحث بعدی در مورد آن بی‌معنی خواهد بود. ولی ما این راه را انتخاب نمی کنیم و به روشن کردن سؤال مربوط به «شکستگی» می‌پردازیم.

اگر مثلاً بتوانیم ثابت کنیم که زوایای α و β در شکل ۱ مجموعی مساوی $۲d$ دارند یا، بجای آن، ثابت کنیم که زوایای α و α' همان شکل باهم برابرند، در اینصورت معلوم خواهد شد که «شکستگی» وجود ندارد و صحت اثبات مدلل می‌شود. آیا این اثبات ممکن است؟ واضح است که باید به این سؤال جواب منفی بدهیم، زیرا جواب مثبت منجر به تساوی $۴۴۲ = ۴۴۱$ می‌شود.

ولی مستقیماً هم می‌توان عدم تساوی α و α' را ثابت کرد و معلوم کرد کدامیک از آنها بزرگتر است. این استدلال برای کسانی قابل فهم است که با مقدمات مثلثات آشنائی داشته باشند (البته بجای مثلثات می‌توان از خواص مثلثهای متشابه هم استفاده کرد). از مثلث III شکل ۱ می‌توان تانژانت α را بدست آورد:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{۲۱}{۸}$$

اگر در ذوزنقهٔ I هم از رأس زاویهٔ β عمودی بر قاعدهٔ بزرگتر رسم کنیم (این عمود درشکل ۱ رسم نشده است)، مثلث قائم‌الزاویه‌ای بدست می‌آید که اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه در آن ۱۳ و $۵ = ۸ - ۱۳$ است و در نتیجه به‌دست می‌آید:

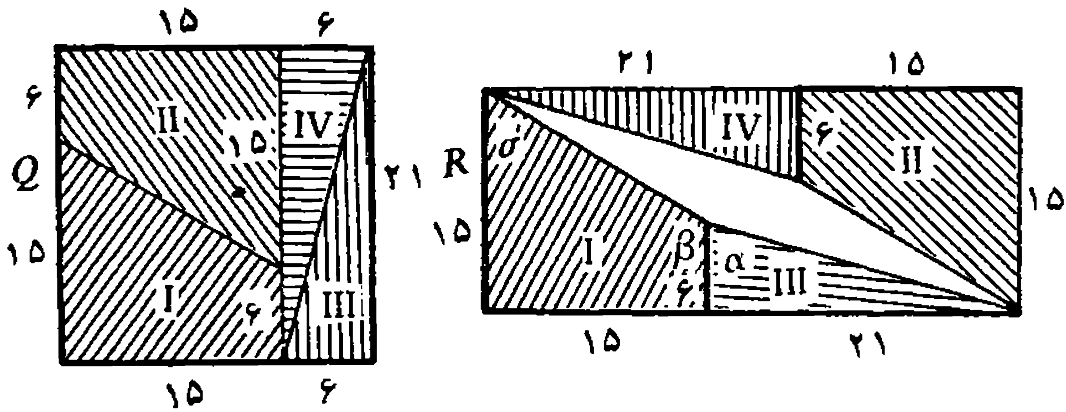
$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{۱۳}{۵}$$

و چون $\frac{۱}{۴۰} = \frac{۱۳}{۵} - \frac{۲۱}{۸}$ و یا $\frac{۱۳}{۵} > \frac{۲۱}{۸}$ است $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha'$ می‌شود و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\alpha > \alpha' \quad , \quad \alpha + \beta > ۲d$$

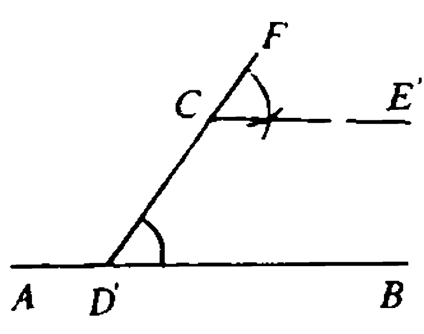
حالا دیگر وضع شکل روشن است: قسمتهای I، II، III و IV از مربع را می‌توان در داخل مستطیل جا داد، ولی آنها نمی‌توانند بطور کامل سطح مستطیل را بپوشانند و «روزنه‌ای» به شکل یک متوازی‌الاضلاع باریک در طول قطر

مستطیل به وجود می‌آورد. تعجبی نیست که متوجه این‌شکاف نمی‌شویم، زیرا در طول ...۳۶/۴۰ سانتیمتر (قطر مستطیل) سطحی مساوی ۱ سانتیمتر مربع دارد و این کمتر از آنست که بتوان ضمن تبدیل مربع Q به مستطیل R متوجه آن شد. اگر بخواهید شکلی داشته باشیم که این وضع با روشنی دیده شود، عددهای شکل ۱ را مثلاً مطابق شکل ۱۵ تغییر می‌دهیم، در اینصورت «شکاف» سطحی مساوی ۹۹ سانتیمتر مربع در مقابل ۵۴۰ سانتیمتر مربع (مساحت مستطیل) خواهد داشت.



شکل ۱۵

دربارهٔ مثال ۲. اشتباهی که در اینجا پیش آمده یک اشتباه منطقی است و آنرا درمنطق رسمی با اصطلاح لاتینی خود (ignoratio elenchi) می‌نامند که با ترجمهٔ آزاد به این معنی است: «معلوم نیست چه چیزی ثابت شده است». ببینیم در آنچه که مربوط به شکل ۲ است کدام حکم را ثابت کرده‌ایم؟ تنها ثابت کرده‌ایم که اگر با روشی که توضیح داده شده است (به‌کمک دو خط عمود)، خطی موازی خط مفروض رسم کنیم، تنها یک خط بدست می‌آید. ولی مگراین تنها طریقهٔ رسم یک خط موازی است؟ نه، می‌دانیم که روشهای دیگری هم برای رسم چنین خطی وجود دارد. مثلاً به جای نقطهٔ D، پای عمود CD (شکل ۲) می‌توانیم



شکل ۱۶

نقطهٔ دلخـواه D' را بـر خط AB انتخـاب کنیم (شکل ۱۶)، سپس با خط $D'F$ آنرا بـه C وصل کـنیم و از نقطـهٔ C نیم خط CE' را چنـان بکشیم که زاویـهٔ FCE' مساوی $CD'B$ بشـود (و ضـمناً نیمـخطهای CE' و $D'B$ در یکطرف FD' قرار گیرد). بر اساس این قضیـه (که قبل از اصـل توازی ثابت می‌شود): دو نیم‌خطی که در یکجهت رسم شوند و زوایـای مساوی با خط سوم بسازد، باهم موازینـد، نتیجه می‌گیریم که خط CE' با AB موازی است. امـا چه کسی تضمین کرده است که خط CE شکل ۲ بر خط CE' شکل ۱۶ منطبق است؟ قبول این مطلب که دو ساختمان مختلف منجر به یک خط راست می‌شود[1] به این معنی است که آنچه را می‌خواستیم ثابت کنیم بدون اثبات پذیرفته‌ایم.

دربارهٔ مثال ۳. درمورد اثبات این قضیه چه فرضهائی کردیم: وقتی یک خط دو خط موازی را قطع کند، دو جفت زاویهٔ متقـابل داخلی به دست می‌آید و ما فرض کردیم که مجموع دو زاویهٔ متقابل داخلی یـا همیشه از $۲d$ بزرگتر، یا همیشه از $۲d$ کوچکتر و یا همیشه مساوی $۲d$ است. ولی روشن است کـه ما همهٔ حالتهای ممکن را در نظر نگرفته‌ایم: این حالت هم ممکن است که مجموع دو زاویهٔ متقابل داخلی گاهی بزرگتر از$۲d$ ،گاهی کوچکتر از$۲d$ وگاهی مساوی $۲d$ باشد. و این فرض هم منجر به هیچ تنـاقضی نمی‌شود. مثلاً اگر فرض کنیم $\widehat{۱} + \widehat{۴} > ۲d$ و $\widehat{۲} + \widehat{۳} < ۲d$ (شکل ۳)، این نامساویها متناقض با تساوی $\widehat{۱} + \widehat{۲} + \widehat{۳} + \widehat{۴} = ۴d$ نخواهند بود.

متذکر می‌شویم که بی‌مایه بودن استدلال را بـدون تشریح مفصل و دقیق روش اثبات آن، می‌توان کشف کرد: در اثبات قضیه مطلقاً از موازی بودن AB و CD استفاده نشده است. بنابراین اگر حکم بر پایهٔ این استدلال صحیح باشد، در حقیقت این قضیه ثابت شده است: «اگر دو خط دلخواه به وسیلـهٔ خط سوم قطع شوند، مجموع هر دو زاویهٔ متقابل داخلی کـه به دست می‌آید مساوی $۲d$ خواهد بود»، و واضح است که این حکم صحیح نیست. و اگر موازی بودن دو خط AB و CD را در نظر بگیـریم، همان امکان چهارم پیش می‌آیـد (که در اثبات خود از آن غفلت کردیم): در یکطرف قاطـع مجموع دو زاویهٔ متقابـل داخلی بزرگتر و در طرف دیگر کوچکتر از $۲d$ است.

۱. در هندسهٔ لباچوسکی خطهای CE و CE' برهم منطبق نیستند.

دربارهٔ مثال ۴. ما به این حکم عادت کرده‌ایم که مجموع زوایای یک مثلث مقداری ثابت است (یعنی مساوی $2d$) و این مقدار ثابت به شکل و اندازه‌های مثلث بستگی ندارد، به همین مناسبت بسیاری ازما دراین مورد اعتراض نمی‌کنند که: «مجموع زوایای مثلث را x فرض می‌کنیم». ولی واقعیت اینست که وقتی می‌خواهیم مجموع زوایای مثلث را به دست آوریم، هیچ اطلاعی در مورد آن نداریم و اینکه مجموع زوایا را مقداری ثابت فرض کنیم هیچگونه اساسی ندارد. البته اگر ثابت بودن مجموع زوایای مثلث را بدون اثبات بپذیریم، آنوقت استدلال ما ثابت می‌کند که این مجموع ثابت مساوی $2d$ است. ولی این قبول به معنای آنست که به جای اصل اقلیدس، اصل دیگری را قبول کرده‌ایم که هیچگونه رجحانی بر آن ندارد.

دربارهٔ مثال ۵. تاریخ ریاضیات مواردی ازاین اشتباه را ثبت کرده است که: بدون هیچ دلیلی قبول کرده‌اند که بین عددهای یک مجموعهٔ نامتناهی مفروض باید یکی از همه بزرگتر (و طبعاً یکی از همه کوچکتر) باشد. ولی هیچکس به این فکر نیفتاده است که بزرگترین عدد را بین عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ... پیدا کند. عدم وجود چنین عددی روشن است، زیرا این عددها یک رشتهٔ صعودی را تشکیل می‌دهند که انتهائی ندارد. اگر کسرهائی را در نظر بگیریم که صورت هرکدام یک واحد از مخرجش کمتر باشد:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

باز هم رشتهٔ بدون انتها به دست می‌آید، بدین معنی که بااضافه کردن یک واحد به صورت و مخرج هر کسر، می‌توان کسر بعدی را به دست آورد. در اینجا هم مثل حالت اول عددها صعودیند و بزرگترین عدد بین آنها وجود ندارد. بطور کلی، بزرگترین کسر واقعی وجود ندارد (منظور ما ازکسر واقعی کسری است که از واحد کوچکتر باشد). مثال هندسی زیر به بحث مورد نظر ما نزدیکتر است:

زاویهٔ داخلی یک چند ضلعی منتظم[1] مساوی $\frac{2d(n-2)}{n}$ است که در آن n

---

۱. چندضلعیی را منتظم گوئیم که هم اضلاع و هم زوایای آن باهم برابر باشد.

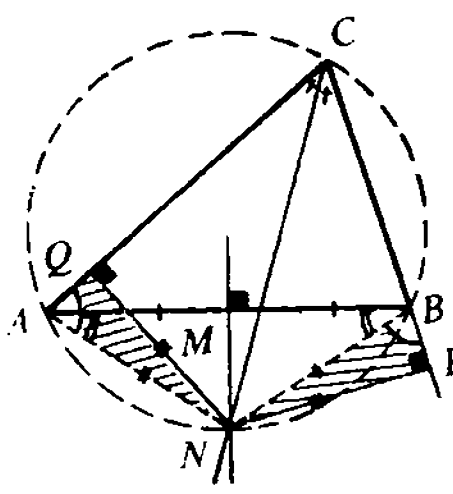
عبارتست از تعداد اضلاع چند ضلعی. می‌بینیم که هـرزاویهٔ چند ضلعی منتظم از $2d$ کوچکتر است، ولی چند ضلعی منتظمی وجـود ندارد که بزرگترین زاویـهٔ داخلی را داشته باشد.

نقطهٔ ضعف استدلال ما دربارهٔ اثبات حکم مورد نظر اینست که با اطلاع از اینکه مجموع زوایـای یک مثلث از $2d$ بیشتر نیست، فرض کردیم که مثلثی وجـود دارد کـه مجموع زوایای آن حداکثر است. البته می‌توان این حکـم را بدون اثبات قبول کرد، ولی در اینصورت اصل جدیدی را جـانشین اصل توازی کرده‌ایم.

با توجه به نتایجی که در مثالهای ۴ و ۵ به دست آوردیم روشن می‌شود که: می‌توان ثابت کرد که مجموع زوایای یک مثلث مساوی است با $2d$، و از این بالاتر می‌توان از اصل تـوازی صرفنظر کرد، بشرطی که یکی از دو حکم زیر را بدون اثبات قبول کنیم: ۱) در تمـام مثلثها، مجموع زوایا مقداری است ثابت؛ ۲) مثلثی (لااقل یکی) وجود دارد که مجموع زوایای آن حداکثر است.

دربارهٔ مثال ۶. تمام حالتهـای ممکن را در نظر نگـرفته‌ایم، یعنی این حالت را فراموش کرده‌ایم که ممکن است ازدو عمود NP و NQ یکی برضلع مثلث ABC و دیگری بر امتـداد ضلع مثلث فرود آید (شکل ۱۷). اگـر این حالت را در نظر بگیریم، یکی از زوایای مجاور به قاعدهٔ AB از مثلث ABC مساوی تفاضل دو زاویه و دیگری مکمـل مجموع همان دو زاویه خواهـد شد.

از اینجـا هیچ نتیجـه‌ای برای زوایای مجاور به قاعده به‌دست نمی‌آید که از آن بتوان تساوی دو ضلـع مثلث را نتـیجه گرفت. وجـود همین نقـص در اثبـات قضیه، برای باطل بودن آن کافی است. البته می‌توان ثابت کرد (با برهان خلف) کـه اگـر مثلث متساوی‌الساقیـن نباشد، هیچیـک از حـالتهای مـورد بررسی (شکلهـای ۵، ۶، ۷) ممکـن نیست و تنها حالت ممکـن (شکل ۱۷) در نظر



شکل ۱۷

گرفته نشده است[۱].

ولی ما بطور مستقیم ثابت می‌کنیم که اگر مثلث متساوی‌الساقین نباشد، وضع قسمتهای مختلف شکل تنها بصورتی درمی‌آید که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. $CA > CB$ می‌گیریم. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم؛ بنا به خاصیت زوایای محاطی، نیمساز زاویهٔ C باید از نقطهٔ N وسط قوس AB (که روبروی زاویهٔ C است) بگذرد. عمود منصف وتر AB هم باید از همین نقطه عبور کند. به این ترتیب نقطهٔ تلاقی نیمساز و عمود منصف روی دایرهٔ محیطی، یعنی در خارج مثلث ABC، قرار می‌گیرد. عمودهائی که از N بر CB و CA رسم شود بنا بر آنکه زوایای NAC و NBC حاده یا منفرجه باشند، روی این اضلاع و یا در امتداد آنها فرود می‌آید. به‌جای این زوایا می‌توان قوسهای روبروی آنها را در دایرهٔ محیطی مثلث در نظر گرفت. چون فرض کردیم $CA > CB$ به دست می‌آید؛ $\widehat{CA} > \widehat{CB}$، از آنجا و با توجه به تساوی $\widehat{AN} = \widehat{BN}$ نتیجه می‌شود $\widehat{CAN} > \widehat{CBN}$. این نتیجه به معنای آنست که قوس CAN بزرگتر از نیمدایره و قوس CBN کوچکتر از نیمدایره است، یعنی زاویهٔ CBN منفرجه و زاویهٔ CAN حاده است. بنابراین عمود NP بر امتداد ضلع CB وعمود NQ بر خود ضلع AC فرود می‌آید (به عنوان تمرین به خواننده پیشنهاد می‌کنیم که ثابت کند نقاط M ، N و Q بریک استقامتند).

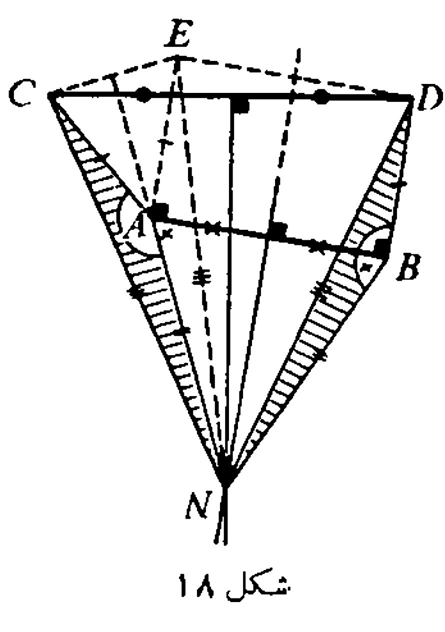
دربارهٔ مثال ۷. اثبات قانع کننده بنظر می‌رسد، زیرا این تصور بوجود

---

۱ . در نظر اول ممکن است بنظر برسد که وقتی نقطهٔ N در داخل مثلث و یا روی ضلع AB هم باشد، این حالت را فراموش کرده‌ایم که ممکن‌است عمود-های NP و NQ در دو طرف ضلع AB قرار گیرد (وقتی که از نقطهٔ واقع در داخل یا روی یکی از اضلاع مثلث عمودهائی بر دو ضلع آن رسم می‌کنیم، ممکن است یکی از عمودها بر ضلع و دیگری بر امتداد ضلع فرود آید، برای این منظور کافی‌است مثلث را منفرجه‌الزاویه در نظر بگیریم). ولی در متن ثابت خواهیم کرد که برای مثلثهائی که متساوی‌الساقین نیستند، محل تلاقی نیمساز یک زاویه با عمود منصف ضلع روبرو درخارج مثلث قرار می‌گیرد اگر خواننده با این قضیه آشناست که «نیمساز هر زاویه ضلع روبرو را به نسبت دوضلع دیگر قطع میکند»، می‌تواند اثبات دیگری برای این خاصیت نقطهٔ تلاقی پیدا کند.

می‌آید که همهٔ حالتهای مختلف را در نظر گرفته‌ایم[1] (نقطه N در بالا، پائین یا روی خط AB قرار می‌گیرد). ولی دراین مثال، اثبات حکم تنها به‌جای نقطهٔ N مربوط نیست. در حالت ۳، وقتی که زاویهٔ قائمهٔ ABD با زاویهٔ حادهٔ ABN جمع شود همیشه زاویهٔ منفرجهٔ DBN را می‌دهد؛ ولی در مورد زاویهٔ منفرجهٔ CAB ممکن است با اضافه کردن زاویهٔ حادهٔ NAB به آن باز هم زاویه‌ای منفرجه بدست آید (شکل ۹)، و ممکن است زاویهٔ «فوق منفرجه» (یعنی بزرگتر از ۱۸۰ درجه ــ شکل ۱۸)، و این وضع، نتیجه‌گیری را بطور اساسی تغییر می‌دهد.

بنابراین حالت ۳ را باید به دو حالت جدید تقسیم کرد: زاویهٔ منفرجهٔ CAB و مثلث CAN: ۱) در یکطرف خط AC قرار می‌گیرند (شکل ۹)، ۲) در دو طرف این خط واقعند (شکل ۱۸ــ فعلاً شکل‌را بدون خط‌چینها درنظر بگیرید). حالت اول را، که در آن زاویهٔ CAB قسمتی از زاویهٔ CAN است، در متن مثال مورد مطالعه قرار دادیم و منجر به تساوی زوایای DBA و CAB شد. ولی حالت دوم به این نتیجه نمی‌رسد: زاویهٔ قائمهٔ DBA مساوی تفاضل دو زاویهٔ DBN و ABN است، درحالیکه زاویهٔ منفرجهٔ CAB بامجموع همین دو زاویهٔ ($\widehat{BAN}$ و $\widehat{CAN}$) رویهم مساوی $4d$ می‌شود. به‌این ترتیب با برهان خلف ثابت می‌شود که این حالت دوم تنها حالت ممکن برای مسئله است.



شکل ۱۸

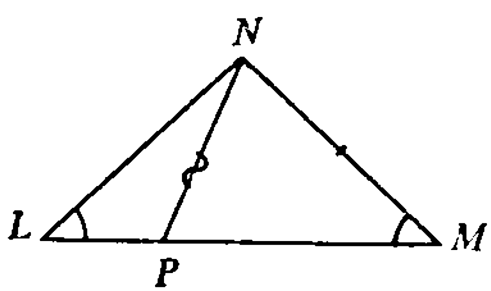
دربارهٔ ساختمان شکل توضیح بیشتری می‌دهیم که بهتر وضع استقرار اجزای شکل را مشخص کند. از نقطهٔ A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم (حالا در شکل ۱۸ خط‌چینها را هم درنظر بگیرید)، روی این عمود پاره‌خط AE را مساوی BD و در همان جهت BD جدا

---

[1] . دو حالت را اساساً وقتی باید مختلف دانست که نتوان اثباتی را که در مورد یک حالت بکار می‌بریم، عیناً در مورد دیگری تکرار کرد.

می‌کنیم؛ واضح است که $AE = AC$ می‌شود. E را به نقاط D ، N و C وصل می‌کنیم ؛ چون چهارضلعی $ABDE$ مستطیل است، محور تقارن پاره‌خط AB ضمناً محور تقارن DE هم خواهد بود، بنابراین $ND = NE$ و از آنجا $NC = NE$. به این ترتیب هر دو نقطهٔ A و N از دو انتهای پاره‌خط CE به یک فاصله است و بنابراین خط AN محور تقارن پاره‌خط CE خواهد بود. قرینهٔ مثلث DBN نسبت به عمود منصف پاره‌خط AB بر مثلث EAN قرار می‌گیرد (دو مثلث مساوی معکوسند، یعنی جهت حرکت روی محیط هریک از آنها مخالف دیگری است)، و قرینهٔ مثلث اخیر هم نسبت به AN بر مثلث CAN قرار می‌گیرد (مثلث اخیر با مثلث DBN هم‌جهت است). بنابراین مثلث CAN را می‌توان با دوران سادهٔ مثلث DBN دور نقطهٔ N و به اندازهٔ زاویهٔ BNA به دست آورد ($\widehat{BNA} = \widehat{EAC}$ ، یعنی زاویهٔ BNA مساوی تفاضل دو زاویهٔ منفرجه و قائمه‌ای است که در ابتدا انتخاب کرده‌ایم).

دربارهٔ مثال ۸. قبلاً مطمئن شویم که این حکم صحیح نیست. برای این منظور کافی است نمونه‌ای مخالف حکم این قضیه ارائه دهیم ، یعنی حالتی را نشان دهیم که شرایط قضیه در آن صدق می‌کند ولی حکم قضیه درمورد آن صادق نیست. برای این منظور مثلث متساوی‌الساقین LMN را در نظر می‌گیریم ($LN = MN$، شکل ۱۹) و آنرا بوسیلهٔ پاره‌خط NP، که از رأس مثلث عبور کرده و بر میانهٔ مثلث منطبق نیست، به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. برای دو مثلث LNP و MNP که به اینطریق به دست می‌آید، ضلع NP مشترک است و علاوه بر آن $LN = MN$ و $\widehat{L} = \widehat{M}$؛ یعنی برای این دومثلث شرایط قضیه برقرار است، در حالیکه دو مثلث مساوی نیستند (لااقل به این مناسبت که $LP \neq MP$). ولی حتی اگر ندانیم که قضیه صحیح است یا غلط، می‌توان نقص استدلال را کشف کرد، این نقص (با توجه به شکلهای ۱۰ تا ۱۲) مربوط به اینست که یک حالت را در نظر

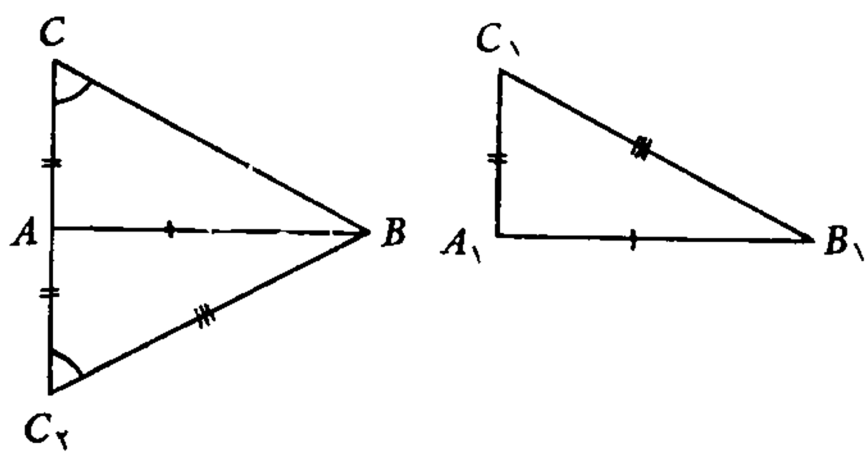


شکل ۱۹

نگرفته‌ایم، حالتی کــه خط CC_2 از یکی از دو انتهای پاره‌خط AB (A یا B) عبور کند، یعنی ضلعهای CA و C_2A یا ضلعهای CB و C_2B در امتداد یکدیگر قرار گیرند.

در اولین مورد از این دو حالت (که ضلعهای مساوی AC و AC_2 بر یک استقامتنــد ـ شکل ۲۰) نتیجه‌گیری مسئله صحیح است: بعـد از قرار دادن مثلث $A_1B_1C_1$ در مجاورت مثلث ABC، مثلث BCC_2 بـه دست می‌آید که با توجه به تساوی دو زاویهٔ C و C_2 متساوی‌الساقین است و بنابراین داریم:

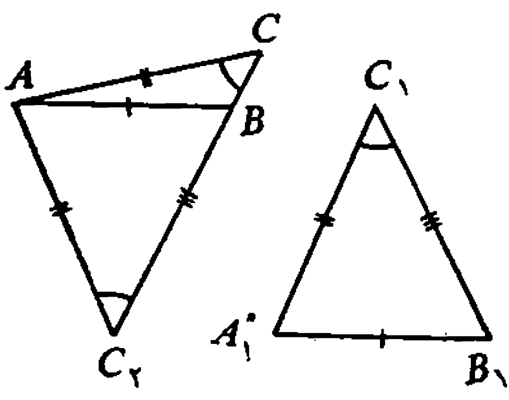
$$BC = BC_2 = B_1C_1$$



شـکل ۲۰

اضافه می‌کنیم که این حالت تنها وقتی پیش می‌آید که مثلثها قائم‌الزاویه باشنــد (در شکل ۲۰ زوایای رأس A مساوی و مجانبند).

حالت بعد موقعی است که دو ضلعی که طبق فرض مسئله اطلاعی دربارهٔ وضع آنها نـداریم (BC و BC_2) بر یک استقـامت قرار گیرند (شکل ۲۱). البتـه مثلث متساوی‌الساقین ACC_2 به دست می‌آید، ولی از آنجا هیچ نتیجه‌ای درمورد اضلاع CB و C_2B نمی‌توان گرفت. در این مــورد خواننده شکل ۱۹ را به خاطر می‌آورد که درآنجا مثلث متساوی‌الساقین به دو مثلث نامساوی تقسیم شده است. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که درحالت کلی دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ برابر نیستند (مگر موقعی که زوایای رأس B و B_1 قائمه باشند، که دراینصورت دو مثلث مساوی می‌شوند).



شکل ۲۱

تبصرهٔ ۱. استدلال فوق راه «اصلاح قضیه» را نشان می‌دهد، یعنی معلوم می‌کند که چگونه این قضیه را می‌توان به قضایای صحیح و مشابه آن تبدیل کرد. دو نمونه از این «تصحیح» را در اینجا می‌آوریم:

a) اگر بین اجزای دو مثلث چنان روابطی باشد که طبق آنها دو ضلع و زاویهٔ روبروی یکی از آنها از مثلث اول با اجزای نظیرش در مثلث دوم برابر باشد، دو زاویهٔ مقابل به دو ضلع دیگر مساوی (در تمام شکلهای ۱۰–۱۲ و ۲۰ – ۲۱ این زوایا با حروف B و B_1 نشان داده شده‌اند) یا باهم مساویند (و در اینصورت مثلثها برابرند، شکلهای ۱۰ – ۱۲ و ۲۰) یا مجموعی مساوی $2d$ دارند (شکل ۲۱).

b) اگر دو ضلع و زاویهٔ روبرو به ضلع بزرگتر از مثلثی با اجزای نظیر آن در مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث برابرند.

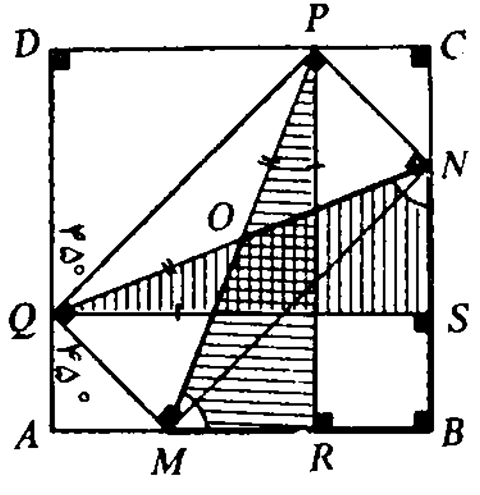
قضیهٔ اخیر گاهی به عنوان «حالت چهارم تساوی مثلثها» وارد در کتابهای درسی شده است.

تبصرهٔ ۲. در بدو امر وضع زیر عجیب به نظر می‌رسد: می‌توان حالت تساوی مثلثها را هرچقدر که بخواهیم به حالت عدم تساوی آنها نزدیک کرد. مثلاً اگر شکل ۱۰ را با شکل ۲۱ مقایسه کنیم، در شکل ۱۰ می‌توان نقطهٔ B را به هر اندازه که بخواهیم به خط CC_2 نزدیک کرد، به نحوی که مثلث BCC_2 تا حد دلخواه «باریک» شود، ولی واضح است که در هر حال این مثلث متساوی‌الساقین باقی می‌ماند و اثبات تساوی دو مثلث به اشکالی برخورد نمی‌کند. ولی وقتی که نقطهٔ B درست بر خط CC_2 قرار گیرد (شکل ۲۱)، تساوی پاره‌خطهای CB و CB_2 و درنتیجه تساوی مثلثها حتمی نیست. در اینجا کوشش می‌کنیم تا حد امکان این وضع را روشن کنیم.

گاهی پیش می‌آید که سه نقطهٔ P ، Q و R را که بر یک خط راست واقعند، به عنوان رأسهای یک «مثلث» درنظر بگیریم؛ اگر دراین صورت Q بین

P و R واقع باشد، زوایای این مثلث چنین‌اند: ۰ $=P$، ۰ $=R$ و $Q=2d$.
مفهوم این اصطلاح روشن است: وقتی‌که نقاط «تقریباً» بر یک خط راست واقع باشند، کاملاً یک مثلث را مشخص می‌کنند که دو زاویهٔ آن «خیلی کوچک» و زاویهٔ سوم «نزدیک» به $2d$ خواهد بود. اگر شکل را بطور اتصالی تغییر دهیم این سه نقطه بر یک خط منطبق می‌شوند و بنظر می‌رسد که برای اینحالت هم وضع قبل برقرار است. بعضی از قضایای مربوط به مثلث در مورد چنین مثلثی (که سه رأس آن بر یک خط راست است) نیز صادق است، مثلاً این قضیه که مجموع زوایای یک مثلث مساوی $2d$ است. در عوض بعضی از قضایای دیگر در حالت حدی مفهوم خود را از دست می‌دهند، مثل این قضیه که اگر مثلثی دو زاویهٔ مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است. این قضیه وقتی صحیح است که زوایای مساوی مخالف صفر باشند، در به اصطلاح مثلث PQR که در آن داریم $\widehat{P}=\widehat{R}=0$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $PQ=PR$، یعنی اینکه Q وسط دو نقطهٔ P و R قرار گرفته باشد، در حقیقت نقطهٔ Q می‌تواند در هر نقطهٔ دلخواه از فاصلهٔ PR واقع باشد. این مثال رابطهٔ مستقیم با مسئلهٔ مورد علاقهٔ ما دارد. وقتی‌که در شکل ۱۰ یا ۱۱ نقطهٔ B برخط CC_2 واقع نباشد، هرقدر زوایای مجاور به ضلع CC_2 از مثلث BCC_2 کوچک باشند، از تساوی این زوایا نتیجه می‌شود: $CB=C_2B$. ولی وقتی‌که مثل شکل ۲۱، مثلث BCC_2 به‌خط مستقیم تبدیل شود، هر دو زاویهٔ مورد نظر مساوی صفر می‌شوند و نتیجهٔ متساوی‌الساقین بودن مثلث، مفهوم خودرا ازدست می‌دهد.

دربارهٔ مثال ۹. حکم قضیه اشتباه است، زیرا به سادگی می‌توان مستطیلی محاط در مربع ساخت که اضلاع آن مساوی نباشند؛ کافی است اضلاع مستطیل را موازی با قطرهای مربع بگیریم (ولی به نحوی که راسهای مستطیل وسط اضلاع مربع قرار نگرفته باشند). از دو رأس روبروی مربع (شکل ۲۲) و مثلاً رأسهای A و C و در طول ضلعهای آن، چهار پاره خط مساوی



شکل ۲۲

$$AM = AQ = CN = CP$$

بطول دلخواه $\neq \frac{a}{۲}$ جدا می‌کنیم (a طول ضلع مربع است)، واضح است که بقیهٔ اضلاع مربع هم مساوی یکدیگر می‌شوند:

$$MB = BN = PD = DQ \neq \frac{a}{۲}$$

نقاط M ، N ، P ، Q ، M را بطور متوالی به یکدیگر وصل می‌کنیم، چهار مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آید که دو به دو باهم مساویند:

$$\overset{\Delta}{BNM} = \overset{\Delta}{DQP} \text{ ، } \overset{\Delta}{AMQ} = \overset{\Delta}{CPN}$$

ازآنجا به دست می‌آید: $MN = QP$, $QM = PN$ و چهار ضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع می‌شود، ولی چون مثلاً داریم:

$$\widehat{MQP} = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ - ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

این چهارضلعی مستطیل می‌شود (اضلاع چهارضلعی $MNPQ$ با اضلاع مربع زوایایی مساوی ۴۵ درجه می‌سازند و بنابراین با اقطار مربع موازیند: از اینجا اثبات جدیدی برای مستطیل بودن $MNPQ$ به دست می‌آید).

بدون توجه به این ساختمان که نادرست بودن حکم قضیه را ثابت می‌کند، می‌توان با استدلال منطقی دربارهٔ آنچه که به عنوان اثبات حکم ذکر شده است نادرستی آنرا روشن کرد. در اثبات حکم، با توجه به شکل ۱۳، فرض کرده‌ایم (شکل ۱۲) که از دو تصویر P بر AB و Q بر BC ، یکی (R) روی ضلع چهارضلعی $MBND$ و دیگری (S) در امتداد ضلع آن قرار می‌گیرد؛ به عبارت دیگر از دو زاویهٔ مساوی $\widehat{OMR}$ و $\widehat{ONS}$ یکی زاویهٔ داخلی و دیگری زاویهٔ خارجی چهارضلعی $MBND$ است. ولی حقیقت اینست که این تنها حالت ممکن نیست، در شکل ۲۲ دیده می‌شود که وضع غیر از آنست و هر دو زاویهٔ مذکور داخلی‌اند.

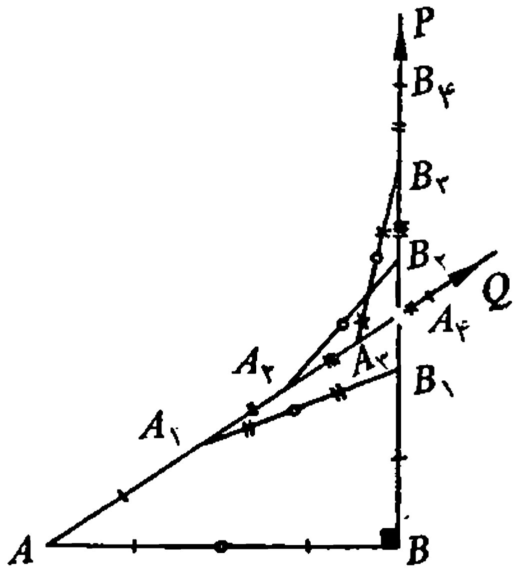
با مختصری دقت می‌توان حکم قضیه را تصحیح کرد؛ مثلاً:

۱) اگر مستطیلی در یک مربع چنان محاط کنیم که هیچیک از اضلاع آن موازی با یکی از قطرهای مربع نباشد، این مستطیل مربع خواهد بود.

یا :

۲) اگر مستطیلی با اضلاع نامساوی در مربع محاط کنیم، اضلاع آن موازی قطرهای مربع خواهد بود.

دربارهٔ مثال ۱۰. در اینجا هم اشتباهی رخ داده است که از لحاظ طبیعت منطقی آن شبیه مثال ۲ است: «معلوم نیست چه‌چیزی ثابت شده است»، به‌عبارت دیگر به جای آنچه که باید ثابت شود، حکم دیگری اثبات شده است، ولی از آنچه که ثابت شده است هیچ‌نتیجه‌ای در مورد حکم اصلی نمی‌توان گرفت.



شکل ۲۳

دو مرتبه دربارهٔ جریـان استدلال تأمل می‌کنیم و برای اینکه کار کشف اشتباه را ساده کنیم به‌جای شکل ۱۴ ازشکل ۲۳ استفـاده مـی‌کـنیـم، کـه در آن نیم‌خطهای AQ و BP یکدیگر را قطع کرده‌اند (برای‌اینکه متهم نشویم که در شکل از قبل جواب مربوط به وجود نقطهٔ تلاقی را داده‌ایم، روی نیم‌خطهای AQ و BP فاصلهٔ کوتاهی‌را رسم نشده بـاقی گذاشته‌ایم). برای سهولت کار پاره‌خطهای AA_1، A_1A_2، A_2A_3، ... اول، دوم، سوم، ... مایـل، و BB_1، B_1B_2، B_2B_3، ... را پاره‌خطهای اول، دوم، سوم، ... عمـود می‌نامیم، دو نتیجه به دست می‌آید:

۱) عمل جـدا کردن این پاره‌خطها انتها نـدارد، به نحوی کـه می‌توان پاره‌خطی از هر شمارهٔ ردیف دلخواه به دست آورد، یعنی n هر چقـدر بزرگ باشد پاره‌خط nام مایل و پاره‌خط nام عمود وجود دارد؛ ۲) ضمناً پاره‌خطهـای هم‌شماره یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی پاره‌خط اول مایل و پاره‌خط اول عمود نقطهٔ مشترکی ندارد. همچنـین پـاره‌خط دوم مایل و پاره‌خط دوم عمـود هم نقطهٔ مشترک نـدارد و غیره (بطور کـلی پاره‌خط nام مـایل با پاره‌خط nام عمـود نقطهٔ مشترکی ندارد). ولی از کجـا معلوم می‌شود کـه دوپاره‌خط با شماره‌های مختلف هم یکـدیگر را قطع نمی‌کنند: مثلاً پاره‌خط بیستم عمود با پاره‌خط

بیست‌وپنجم مایل؟ مگر نه اینست که اگر بخواهیم ثابت کنیم عمود و مایل یکدیگر را قطع نمی‌کنند، باید ثابت کنیم که هیچیک از پاره‌خطهای عمود با هیچیک از پاره‌خطهای مایل نقطهٔ مشترک ندارد؟ ما بجای اثبات این‌حکم ثابت کرده‌ایم که هر پاره‌خط عمود با پاره‌خط مایل همشمارهٔ آن نقطهٔ مشترک ندارد و روشن است که این حکم را نمی‌توان بجای حکم اصلی قرار داد. اگر به‌شکل ۲۳ مراجعه کنیم، می‌بینیم که در آنجا پاره‌خط دوم عمود پاره‌خط چهارم مایل را قطع کرده است[1]. سفسطهٔ مربوط به این مثال از اینجهت قابل توجه است که خود اشتباه سطحی و مقدماتی است، در حالیکه کوشش برای کشف این اشتباه کم و بیش دقیق است.

تبصره. همانطور که قبلاً گفتیم (در شرح مثال ۱۰) تنها ازفکر پروکلوس برای طرح این سفسطه استفاده کردیم. پروکلوس دوخط دلخواه درنظر می‌گیرد (دقیق‌تر: دو نیم‌خطی که بر یک خط واقع نباشد و مبدأ آنها مختلف باشد)، و به کمک جدا کردن پاره‌خطهای متوالی که بطور نامتناهی ادامه پیدا می‌کند (شبیه آنچه که ما شرح دادیم) ثابت می‌کند که این دو خط متقاطع نیستند. پروکلوس بطور صحیحی اشتباه منطقی را که در این استدلال سفسطه‌آمیز وجود دارد تفسیر می‌کند، او می‌گوید: تنها ثابت شده است که نقطهٔ تلاقی را به کمک چنین ساختمانی نمی‌توان به دست آورد، ولی این به معنای آن نیست که چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

نتیجه‌ها . این سؤال طبعاً پیش می‌آید: اگر در استدلالهای ریاضی، گاهی چنان اشتباهات پنهانی وجود دارد که برای کشف آنها باید به تجزیه و تحلیل دقیق مطلب بپردازیم، آیا می‌توان به ریاضیات چنان اعتمادی داشت که آنرا، همانطور که معمول است، پایه و استخوان‌بندی علوم دقیقه (فیزیک، صنعت وغیره) به حساب آورد؟

البته هیچ روش علمی را نمی‌توان در مقابل نتیجه‌گیریهای غلط تضمین کرد و طریقهٔ صحیح استفاده از این روشها بیش از همه ضرورت دارد. این‌مطلب تنها به معنای اینست که سرچشمهٔ اشتباهات ممکنه را مطالعه کنیم و دربارهٔ اساس

---

۱. با در دست داشتن زاویهٔ A و به کمک مثلثات می‌توان شمارهٔ پاره‌خط‌های متقاطع را بدست آورد.

استدلالهای خود سختگیرتر باشیم. برای اینکه برایمان روشن شود که خطر اشتباه کردن تاچه حد واقعی است، باید به تاریخ علم مراجعه کنیم.

تاریخ، اشتباهات زیادی را در کار ریاضی‌دانها نشان می‌دهد، ولی این اشتباهات هرگزمانع پیشرفت علم نشده‌است ودرمراحل بالاتر کار، ازنقاط ضعف آنها پرده برداشته شده است. بهترین‌مثال دراین‌مورد تلاشی‌است که درطول چند قرن برای اثبات اصل توازی انجام می‌گرفت. لباچوسکی درسال ۱۸۲۳ دربارهٔ این اصل نوشت: «اثبات دقیق این اصل را تا کنون نتوانسته‌اند پیدا کنند. آنچه که تا کنون به‌نام اثبات ارائه شده است، تنها به روشن‌تر کردن مطلب کمک می‌کند و به مفهوم کامل خود نمی‌تواند به عنوان اثبات ریاضی مورد توجه قرار گیرد». روی‌همین اعتقاد بود که لباچوسکی بعداز چند سال، کشف مشهور خودرا تکمیل کرد. این کشف در تاریخ هندسه مرحلهٔ جدیدی به وجود آورد، ابتدا برای لباچوسکی وسپس برای همهٔ ریاضی‌دانهای جهان عدم قابلیت و نارسائی روشهای اثبات اصل توازی واضح شد.

خواننده در فصلهای سوم و چهارم مطالب روشن‌تری دربارهٔ این نتیجه‌گیریها پیدا می‌کند.

۳ اشتباهاتی که به مناسبت مفهوم حد در استدلالها بوجود می‌آید

مثالهائی که در این فصل آمده است برای کلاسهای دورهٔ دوم متوسطه قابل فهم است، برای فهم این مثالها باید با طول دایره، مفهوم حد، مثلثات و در یک مورد با هندسهٔ فضائی آشنائی داشت.

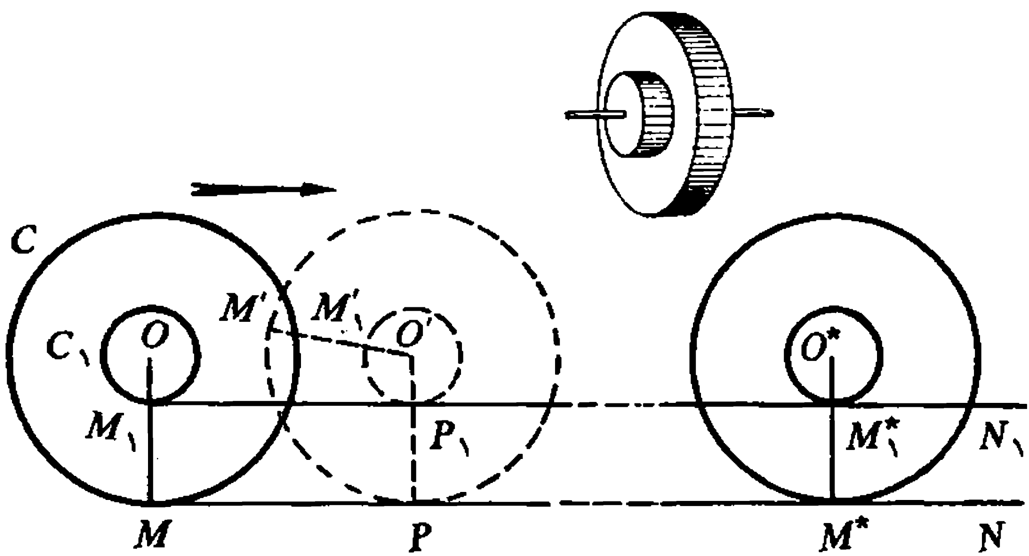
مثال ۱۱. محیط همهٔ دایره ها یکی است.

این سفسطه متعلق به آریستوتل فیلسوف یونانی است (قرن چهارم قبل از میلاد) و به دلیلی که به زودی خواهیم دید «چرخ آریستوتل» نامیده می‌شود.

مسئله‌ای از حساب را بخاطر بیاوریم که در آن محیط چرخهای درشکه یا اتومبیلی که بر یک جاده درحال حرکت است، داده شده و راهی را که طی کرده است خواسته‌اند و برعکس. در حل این مسئله از این حقیقت بظاهر واضح استفاده می‌شود که وقتی چرخ یک دور کامل بزند به اندازهٔ محیط خود جلو می‌رود، مثلاً اگر محیط دایرهٔ چرخ مساوی ۲ متر باشد و ۳۰ دور کامل زده باشد، فاصله‌ای به اندازهٔ ۶۰ متر طی کرده است. باید گفت در آنجا که حرکت بر یک خط مستقیم باشد و به دقت فوق‌العاده‌ای هم احتیاج نباشد، این محاسبه به وسیلهٔ تجربه تأیید می‌شود. محیط دایرهٔ چرخ را می‌توان با نواری اندازه گرفت؛ برای شمردن دورهای کاملی که چرخ می‌زند می‌توان نقطه‌ای از محیط چرخ را علامت گذاشت ویا چرخ را در مسیری به حرکت انداخت که اثر آن روی زمین بماند (بسیاری از کنتورها بر اساس محاسبهٔ تعداد دورهای چرخ

ساخته شده‌اند که سپس با تبدیل آن فاصلهٔ طی شده و یا به کمک یک مکانیزم ساعتی، سرعت را نشان می‌دهند). البته همهٔ این محاسبه‌ها عملاً صحیح است، بشرطی که حرکت چرخ «طبیعی» باشد، یعنی به هوا نپرد و سر جای خود نچرخد، به عبارت دیگر و به زبان مکانیک «چرخ بدون لغزش حرکت کند».

حالا به مسئلهٔ خود برمی‌گردیم. دو دایرهٔ متحدالمرکز C و C_1 را درنظر می‌گیریم که به یکدیگر محکم شده باشند (شکل ۲۴). در عین حال نمونهٔ



شکل ۲۴

فیزیکی آنرا هم درنظر می‌گیریم: دو غلطک استوانه‌ای که محوری مشترک و افقی داشته باشند و محکم به یکدیگر وصل شده باشند (حتی بهتر است فرض کنیم که قسمتی از استوانه را به صورت استوانهٔ جدیدی تراشیده باشیم که محورش همان محور استوانهٔ اصلی و شعاعش کوچکتر از آن باشد؛ شکل ۲۴- بالا). از نقاط M و M_1 واقع بر محیط دایره‌های C و C_1، که با نقطهٔ O بر یک استقامتند، مماسهای MN و M_1N_1 را بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. چون دایره‌ها به هم محکم شده‌اند، وقتی که یکی از دایره‌ها به اندازهٔ زاویه‌ای حرکت کند، دیگری هم به همان اندازه حرکت خواهد کرد. به این ترتیب، اگر دایرهٔ C روی خط MN حرکت کند، دایرهٔ C_1 روی خط M_1N_1 حرکت خواهد کرد (در شکل ۲۴ علامت پیکان نشان می دهد که دو دایرهٔ بهم چسبیده درکدام جهت حرکت می‌کنند؛ دایرهٔ نقطه‌چین یکی اوضاع بینابینی دایره را نشان

می‌دهد، ضمناً M' و M'_1 اوضاع جدید نقـاط M و M_1 هستند). برای نمونهٔ فیزیکی باید اینطور فرض کرد که زیر هریک از غلطکها یک سطح افقی قرار گرفته است و هریک از آنها روی سطح مربوطهٔ خـود می‌غلطند. فرض می‌کنیم که دایرهٔ C روی خط MN یک دور کامل بزند و نقطهٔ M به وضع نقطهٔ M^* درآید؛ در این بین دایرهٔ C_1 هم یک دور کـامل می‌زند و نقطـهٔ M_1 به وضع M_1^* روی شعاع O^*M^* درمی‌آیـد؛ O^*M^* موازی OM است، زیرا هردو بر خط MN عمودند. از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$MM^* = M_1M_1^*$$

یعنی هر دو دایره بعد از یک دور کامل حـرکت، راهی مساوی یکدیگر طی می‌کنند و بنابراین محیط دو دایره برابر است. و چون دو دایرهٔ C و C_1 را کاملاً دلخواه گرفته‌ایم، ثابت می‌شود که محیط هر دو دایرهٔ دلخواه یکی‌است.

تبصره. نمی‌خواهیم جواب این تناقض روشن را از قبل بدهیم (در این مورد درفصل چهارم صحبت خواهیم کرد). آنچه که دراینجا می آوریم برای تأمل بیشتر در مورد این سفسطه مفید است.

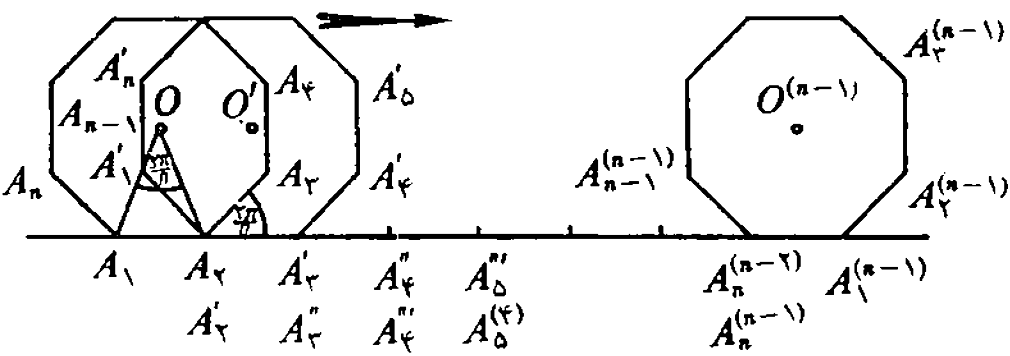
اغلب دایره را به عنوان حد چندضلعی منتظم محاط درآن (و یا چندضلعی منتظم محیط برآن) در نظـر می‌گیرند، وقتی‌که تعـداد اضلاع آن بطور نامحدود صعودی باشد[1]. این مطلب فکری را به ما تلقین می‌کند: برای اینکه سیر حرکت

---

۱. عمداً دراینجا اصطلاح «حد» را بکار برده‌ایم (بجای اصطلاح متداول «وضع حدی»)، که دارای مفهوم کاملاً دقیقی است: حلقه‌ای در نظر می‌گیریم که مرزهای داخلی و خـارجی آنرا دو دایـره تشکیل دهند کـه با دایره مفروض متحدالمرکز بوده و شعـاع یکی بزرگتر و دیگری کوچکتر از دایـرهٔ مفروض باشد (مثلاً می‌توان حلقه را بین دو دایرهٔ به شعاعهای $R-\varepsilon$ و $R+\varepsilon$ دانست، که در آن R عبارتست از شعـاع دایرهٔ مفروض)، عددی مانند n می‌توان پیـدا کرد بطوری که همهٔ چنـد ضلعی منتظم محاطی (یـا محیطی) که دارای n ضلع یا بیشتر باشند بطور کامل در داخـل این حلقه قرار گیرند؛ دایرهٔ کوچکتر حلقه، حد داخلی و دایـرهٔ بزرگتر حد خارجی این چند ضلعیهاست. این مفهوم را نباید با این حکم معروف (که اغلب به صورت تعریف بیان می‌شود) اشتباه کرد کهطبق آن: «محیط دایره عبارتست از حد دنبالهٔ محیطهای چند ضلعیهای منتظم محاطی (یا محیـطی)، وقتـی کـه . . .». همانطور که می‌بینیم (مثالهای ۱۲-۱۴ را هم ببینید)، در این دو مورد اصطلاح «حد» به دو مفهوم مختلف بکار می‌رود.

دایره را برای خود روشن کنیم، بجای دایره یک چند ضلعی منتظم را در نظر می‌گیریم: هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی بیشتر باشد، به تصور غلطیدن دایره نزدیکتر می‌شویم.

وقتی که می‌گوئیم «چند ضلعی (محدب) بدون لغزش روی خط راست می‌غلطد» معنای روشنی دارد: جهت معینی برای حرکت روی محیط چندضلعی، و مثلاً عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت (جهت مثلثاتی)، در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که در وضع اولیه، یکی از اضلاع چند ضلعی روی خط راست



شکل ۲۵

قرار گرفته باشد؛ چندضلعی را دور رأسی که بین این ضلع وضلع بعدی مشترک است دوران می‌دهیم تا وقتی که ضلع بعدی روی خط راست قرار گیرد؛ سپس چندضلعی را دور رأس بعدی دوران می‌دهیم و غیره. بطور خلاصه، چند ضلعی از روی یک ضلع به روی ضلع دیگر «جابجا می‌شود» درحالیکه دور رأس مشترک این دو ضلع دوران می‌کند، و در نتیجه چندضلعی در طول خط راست و درجهت معینی جابجا می‌شود.

در حالتی که n ضلعی منتظم باشد (شکل ۲۵، که در آنجا $n=\text{۸}$) رأس‌های آنرا $A_\text{۱}$ ، $A_\text{۲}$ ، . . . ، $A_{n-\text{۱}}$ ، A_n می‌نامیم و فرض می‌کنیم که در وضع اولیه، ضلع $A_\text{۱}A_\text{۲}$ روی خط راست واقع باشد، چند ضلعی روی این‌خط راست و در جهت $A_\text{۱}A_\text{۲}$ می‌غلطد (جهت حرکت روی شکل ۲۵ با پیکان نشان داده شده است). زاویهٔ خارجی چندضلعی، همچنین زاویهٔ مرکزی آن بر حسب رادیان مساوی $\frac{\text{۲}\pi}{n}$ است (اندازهٔ این زاویه بر حسب زاویهٔ قائمهٔ مساوی $\frac{\text{۴}d}{n}$

و برحسب درجه مساوی $\frac{360^\circ}{n}$ است)؛ بنابراین کافی است چندضلعی را دور رأس A_2 و به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2\pi}{n}$ دوران دهیم تا ضلع A_2A_3 بر خط راست قرار گیرد. بعد از این دوران، مرکز چندضلعی یعنی O به وضع O' در می‌آید و رأسهای A_1 ، A_2 ، A_3 ، . . . ، A_n به ترتیب به وضعهای A'_1 ، A'_2 (منطبق بر A_2) ، A'_3 ، . . . ، A'_n درمی‌آیند. دوران جدید دور رأس A'_3 به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2\pi}{n}$ چندضلعی $A'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$ را به وضع $A''_1A''_2A''_3 \ldots A''_n$ درمی‌آورد (روی شکل ۲۵ تنها رأس A''_3 ، که بر A'_3 منطبق است ، و A''_4 ، که برخط راست واقع است، علامت گذاشته شده است). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، بعد از $(n-1)$ دوران ، چندضلعی به وضع $A_1^{(n-1)}A_2^{(n-1)} \ldots A_n^{(n-1)}$ درمی‌آید ، که در آن مرکز چندضلعی درنقطهٔ $O^{(n-1)}$ وضلع $A_n^{(n-1)}A_1^{(n-1)}$ برخط راست قرار می‌گیرد؛ چون رأس A_1 دوباره روی خط قرار گرفته است احتیاجی به ادامهٔ حرکت نیست و به سادگی می‌توان فهمید که پاره‌خط $A_1A_1^{(n-1)}$ مساوی محیط چندضلعی است.

خواننده متوجه شده است که وضع هر رأس را با دو عدد (یکی پائین و دیگری بالای حرف نمایندهٔ رأس) نشان داده‌ایم : عدد پائین جای رأس را در وضع اولیه نشان می‌دهد و عدد بالا تعداد دوران را معین می‌کند؛ مثلاً علامت $A_6^{(4)}$ وضع رأس A_6 را بعد از دوران چهارم مشخص می‌کند.

در ردیف خواصی که برای شکل ۲۵، ضمن حرکت چند ضلعی ، شرح دادیم ، می‌توان خواص احتمالی دیگری را، بسته به مقدار انتخابی n به دست آورد. خواننده را راهنمائی می‌کنیم که شکل دیگری رسم کند و تعداد اضلاع را عدد دیگری، و مثلاً عدد فرد ۵، بگیرد.

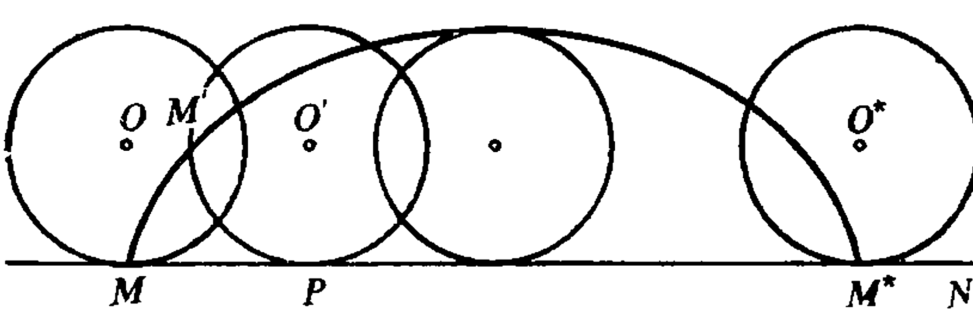
حالا برای اینکه به قضیهٔ سفسطه‌آمیز خود برگردیم، به جای دو دایرهٔ متحدالمرکز، دو n ضلعی منتظم متحدالمرکز با اضلاع متناظر موازی درنظر می‌گیریم؛ به عبارت دیگر، دو چندضلعی منتظم در نظر می‌گیریم که یکی از تجانس دیگری ، باانتخاب مرکز آن به عنوان مرکز تجانس، بدست آمده باشد. دو چند ضلعی را متصل بهم فرض می‌کنیم و چند ضلعی بزرگتر را بنا برتوضیحی

که داده‌ایم روی یک خط راست می‌غلطانیم و دقت می‌کنیم که چندضلعی‌کوچکتر چگونه جابجا می‌شود. آیا چندضلعی کوچکتر هم از یک ضلع به ضلع دیگر می‌غلطد ؟ آیا وضع محیط چندضلعی کوچکتر، ضمن حرکت، مثل وضع محیط چندضلعی بزرگتر است؟ آیا می‌توان برعکس عمل کرد: چند ضلعی کوچکتر را به حرکت درآورد و وضع حرکت چند ضلعی بزرگتر را مطالعه کرد؟

مسئله . حالا بـه طرح مسئله‌ای می‌پردازیم، که در آن بـه منظور دیگری بجای دایره، از غلطیدن چندضلعی استفاده می‌کنیم.

از لحاظ موضوعی که در این فصل دنبـال می‌کنیم، این مسئله به مناسبت اینکه به مطالعهٔ چند عبور حدی احتیاج دارد، اهمیت خاصی دارد.

می‌دانیم که وقتی دایره بر یک خط راست می‌غلطد، هـر نقطهٔ این دایره روی یک منحنی حرکت می‌کند که سیکلوئید نامیده می‌شود. اگر حرکت نقطه‌ای را تعقیب کنیم که در وضع اولیهٔ دایره در «پائین» قرار گرفته باشد، یعنی بر نقطهٔ تماس منطبق باشد (شکل ۲۶ را با شکـل ۲۴ مقایسه کنید)، مسیر چنین نقطه‌ای بین دو وضع متوالی M و M^* (یعنی بعدازآنکه دایره یک دور کامل چرخیده است) به صورت «قوس سیکلوئید» $MM'M^*$ درمی‌آید.



شکل ۲۶

به کمک ریاضیات عالی ثابت می‌شود که طول این قوس مساوی ۸ برابر شعاع دایرهٔ غلطنده است و مساحت بین قوس و خط MM^* برابر است بـا سه برابر مساحت این دایره. مسئله عبارت از آنست که این نتایج را به طریقههـای مقدماتی به دست آوریم. بـرای این منظور پیشنهاد می‌شود کـه به جای دایـرهٔ غلطندهٔ به شعاع R ، nضلعی منتظم محاط در آن درنظر گرفته شود.

با علامتهائی که در شکل ۲۵ گذاشته شده است، مسیر نقطهٔ A_1 عبارتست

از قوسهای دایره‌ای (به تعداد $n-1$؛ در شکل ۲۵ این قوسها رسم نشده‌اند): $\widehat{A_1A'_1}$ به مرکز A_2، $\widehat{A'_1A''_1}$ به مرکز A'_2، ...، $\widehat{A_1^{(n-2)}A_1^{(n-1)}}$ به مرکز $A_n^{(n-2)}$. این قوسهای دایره‌ای رویهم یک منحنی را تشکیل می‌دهند که از A_1 تا $A_1^{(n-1)}$ ادامه دارد و شبیه سیکلوئید است؛ اختلاف این منحنی با سیکلوئید در وجود «نقاط شکستگی» (در محل اتصال هر دو قوس مجاور) است. با بزرگتر شدن عدد n، شکستگیها صافتر می‌شود و منحنی که از قوسهای دایره‌ای تشکیل شده است به قوس سیکلوئید نزدیکتر می‌شود. می‌توان انتظار داشت که وقتی $n\to\infty$، این منحنی به سیکلوئید تبدیل شود. ولی به کمک مثلثات مقدماتی می‌توان طول منحنی مسیر را برای هر عدد n (و وقتی که رأس چندضلعی یک دور کامل می‌زند) بدست آورد وهمچنین مساحت بین این مسیر وخط $A_1A_1^{(n-1)}$ را محاسبه کرد.

اگر در عبارتهائی که برای محیط و مساحت به دست می‌آید، مقادیر حدی را به ازای $n\to\infty$ معین کنیم به ترتیب $8R$ و $3\pi R^2$ به دست می‌آید، یعنی نتیجه‌ای که انتظارش را داشتیم[1]. ولی این روش استدلال برای محاسبهٔ محیط و

---

۱. برای این محاسبه‌ها، علاوه بر روابط عادی که در کتابهای درسی مثلثات وجود دارد، روابط زیر هم مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin k\alpha=\frac{\sin k\frac{\alpha}{2}.\sin(k+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\cdots+\sin^2 k\alpha=\frac{2k+1}{4}-\frac{\sin(2k+1)\alpha}{4\sin\alpha},$$

$$2(\sin\alpha\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\sin 3\alpha+\cdots+\sin(k-1)\alpha\sin k\alpha)=$$
$$=k\cos\alpha-\frac{\sin 2k\alpha}{2\sin\alpha}$$

(خواننده می‌تواند صحت این اتحادها را، مثلاً به‌کمک استقراء ریاضی ثابت کند)؛

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega}{\omega}=1$$ (ω اندازهٔ زاویه برحسب رادیان است)

(این رابطه را می‌توان دربسیاری از کتابهای درسی مثلثات پیدا کرد).

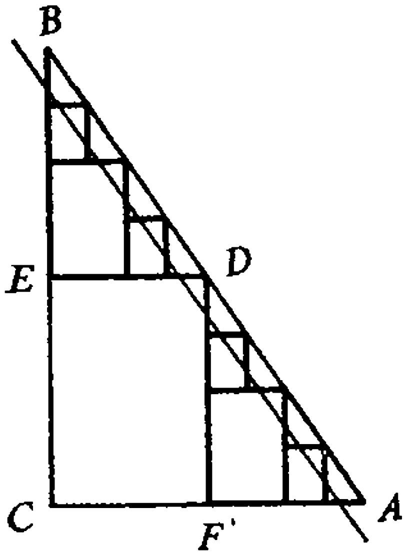
مساحت سیکلوئید تنها وقتی کامل خواهد بود که بر اساس عبور حدی باشد، یعنی ثابت شود که وقتی $n \to \infty$، محیط و مساحتی که از غلطیدن n ضلعی به دست می‌آید، دارای حدی مساوی محیط و مساحت سیکلوئید خواهد بود. اثبات این مطلب به کمک ریاضیات مقدماتی ممکن است عملی باشد ولی ساده نیست.

مسئله را می‌توان در حالتهای دیگری هم مورد مطالعه قرار داد: وقتی که دایره روی محیط یک دایره و در داخل یا خارج آن بغلطد، مسیر یک نقطهٔ آن به ترتیب اپیسیکلوئید و هیپوسیکلوئید نامیده می‌شود. می‌توان برای مطالعهٔ این منحنیها هم بجای دایرهٔ غلطنده، چندضلعی منتظم محاطی درآنرا درنظر گرفت و سپس عبور حدی را مورد بررسی قرار داد.

مثال ۱۲. در مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر برابر است با مجموع طولهای اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۲۷، $C = ۹۰^\circ$) از نقطهٔ D وسط وتر عمودهای DE و DF را بر اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه فرود می‌آوریم، خط شکستهٔ $BEDFA$ به دست می‌آید که طول آن برابر است با مجموع طولهای دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه. این ساختمان را برای هریک از مثلثهای DBE و ADF تکرار می‌کنیم: از وسط وترهای DB و AD عمودهائی بر اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه فرود می‌آوریم، خط شکستهٔ ۸ضلعی بدست می‌آید که طولش با طول خط شکستهٔ قبلی برابر است. این ساختمان را می‌توان بی‌نهایت مرتبه ادامه داد: وتر مثلث به ترتیب به ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... قسمت مساوی تقسیم می‌شود؛ به ترتیب خطهای شکستهٔ پلکانی به دست می‌آید، که بطور خلاصه پلکان می‌نامیم، و به ترتیب از ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... «دندانه» (یعنی ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ... پاره‌خط) تشکیل شده‌اند و دونقطهٔ A و B را بهم وصل می‌کنند. همهٔ «پلکانها» طولی مساوی هم دارند (یعنی مجموع طولهای پاره‌خطها ثابت می‌ماند)، و این طول برابر است باطول وتر مثلث. با اضافه کردن تعداد دندانه‌ها، پلکان به وتر AB نزدیکتر می‌شود، به نحوی که اگر این تعداد به اندازهٔ کافی زیاد شود، در عمل نمی‌توان خط شکسته را از دندانه‌های کوچک پلکان تشخیص داد (همانطور که در مورد چندضلعیهای منتظم محاطی، با زیاد شدن تعداد اضلاع، نمی‌توان اختلاف بین محیط آن و محیط چندضلعی

را تشخیص داد).



شکل ۲۷

با این وضع می‌توان گفت: دنبالهٔ این «پلکان» در حد به پاره‌خط AB می‌رسد، به این معنی که بزرگترین فاصلهٔ هر نقطه از این پلکان تا وتر مثلث ABC، وقتی که تعداد پله‌ها رو به افزایش گذارد، به سمت صفر میل می‌کند (درحقیقت این حداکثر فاصله عبارتست از ارتفاع وارد بر وتر در هریک از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ مساوی‌که پلکان را تشکیل داده‌اند، این ارتفاع از وترمثلث مربوطه کوچکتر است و چون وتر به سمت صفر میل می‌کند، ارتفاع وارد بر آنهم به سمت صفر میل خواهد کرد).

به عبارت دیگر نوار بین وتر AB و خط موازی‌آن که اضلاع مجاور به‌زاویه قائمه مثلثها را قطع کرده است (شکل۲۷) هرقدر باریک باشد، در دنبالهٔ پلکانها، می‌توان یکی را پیدا کرد که خودش و تمام پلکانهای بعد ازآن کاملاً در داخل این نوار قرار گرفته باشند. ولی دنباله طولهای تمام خطهای شکسته (پلکانها) از یک عدد ثابت تشکیل شده است و بنابراین حدآن مساوی همین عدد، یعنی مجموع طولهای دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث ABC، است. از طرف دیگر حد پلکانها، وتر مثلث است و بنابراین طول پلکانها هم باید حدی مساوی طول وتر داشته باشد؛ و این دو حد مختلفی که برای دنبالهٔ طول پلکانها به دست می‌آید حکم ما را ثابت می‌کند.

تبصرهٔ ۱. هیچ لزومی ندارد که مثلث ABC را قائم‌الزاویه بگیریم (تنها رجحانی که مثلث قائم‌الزاویه دارد اینست که اضلاع آن نامهای بخصوصی دارند). در حالت مثلث حاده‌الزاویه می‌توان دنباله را به این ترتیب ساخت که از وسط یک ضلع به موازات دو ضلع دیگر رسم کنیم. و همچنین لزومی ندارد که ضلع را به ۲، ۴، ۸، . . . قسمت مساوی تقسیم کنیم، می‌توان آنرا به ۲، ۳، ۴، ۵، . . . و حتی به قسمتهای نامساوی تقسیم کرد، تنها باید تعداد تقسیمها بطور نامتناهی بزرگ شود و بزرگترین قسمت تقسیم به سمت صفر میل کند.

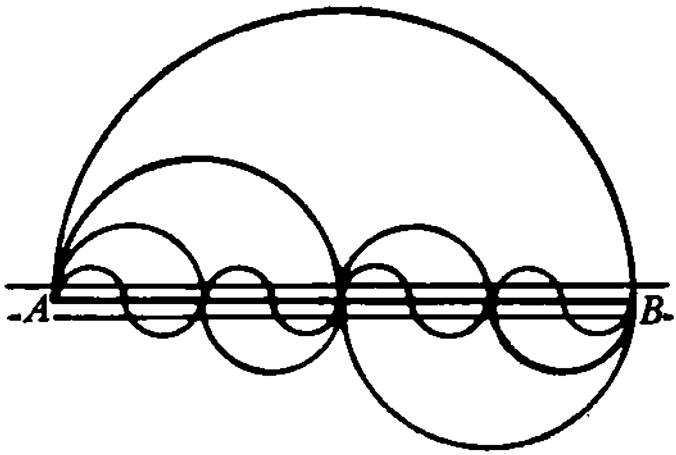
تبصرهٔ ۲. ممکن است خواننده سرچشمهٔ خطا را در اینجا جستجو کند که

طول «پلکانها» مقداریست ثابت و بنابراین گویا نمی‌توان دربارهٔ حدآنها صحبت کرد. دراین مورد باید متذکر شد که ریاضی‌دانها دنباله‌هائی را هم که از عددهای مساوی تشکیل شده‌اند مورد مطالعه قرار می‌دهند؛ در اینصورت خود این عدد حد دنبالهٔ مفروض می‌شود و دقیقاً با مفهوم «حد دنباله» تطبیق می‌کند. ولی بدون اینکه اشکالی پیش آید، می‌توان ساختمان را چنان درنظر گرفت که طول «پلکان» تغییر کند و سایر شرایط بحث مثل سابق باشد. مثلاً کافی است در هر پلکان، اولین پله را حذف کنیم، یعنی در اولین مثلث قائم‌الزاویه‌ای که تشکیل می‌شود به جای دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، وتر آنرا در نظر بگیریم. در چنین وضعی حد این «پلکان خراب» پاره‌خط AB خواهد بود ومجموع طولهای پاره‌خطهای تشکیل دهندهٔ آن که با مجموع $AC + BC$ اختلاف دارد، در حد مساوی این مجموع خواهد بود.

مثال ۱۳. عدد π برابر است با ۲.

به قطر پاره‌خط AB نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل ۲۸)؛ سپس پاره‌خط AB را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و به قطر هرکدام نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم، بطوری که در دو طرف AB قرار گرفته باشند. این دو نیمدایره تشکیل یک منحنی موجی می‌دهند (که بی‌شباهت به منحنی سینوسی نیست) و طول آن از A تا B مساوی طول نیمدایرهٔ اصلی، یعنی $\frac{\pi}{۲}AB$ است، در حقیقت قطر هریک از نیمدایره‌های کوچک نصف قطر نیمدایرهٔ اصلی است و بنا براین محیط هریک ازآنها مساوی نصف محیط نیمدایرهٔ اصلی است. حالا پاره‌خط AB را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم ومنحنی موجی می‌سازیم که ازچهار نیمدایره تشکیل شده باشد (شکل ۲۸)، مجموع محیطهای این نیمدایره‌ها هم مساوی $\frac{\pi}{۲}AB$ است. این وضع را بطور نامحدود ادامه می‌دهیم وبترتیب پاره‌خط را به‌۸، ۱۶، . . . قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم وروی‌آنها نیمدایره‌هائی می‌سازیم که بطور متناوب در بالا و پائین خط AB قرار گرفته باشند. به این ترتیب دنباله‌ای از منحنیهای موجی به دست می‌آید که مرتباً به پاره‌خط AB نزدیکتر می‌شوند ودرحد به این معناست که بزرگترین فاصلهٔ هرمنحنی موجی تا خط AB به‌سمت صفرمیل می‌کند (واضح است که این بزرگترین فاصله برابراست باشعاع

نیمدایره‌ای که یک موج منحنی را تشکیل می‌دهد). در شکل ۲۸ نواری بین دو خط موازی AB داده شده است؛ این نوار هر اندازه باریک باشد، در دنبالهٔ مفروض می‌توان منحنی پیدا کرد که ازآن به‌بعد همهٔ منحنیهای موجی که درفاصلهٔ



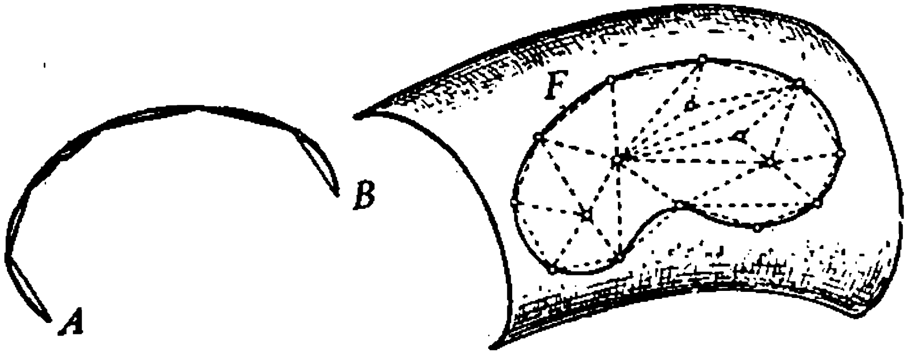
شکل ۲۸

A و B قراردارند بطور کامل در داخل این نوار قرار گرفته باشند. طول هریک از این منحنیهای موجی به هرحال مساوی $\frac{\pi}{۲} AB$ است؛ بنابر این درحد هم باید این طول بهمین اندازه باشد؛ حد این دنباله خط AB است و از آنجا باید $AB = \frac{\pi}{۲} AB$ یا $\pi = ۲$ باشد.

تبصره ـ تبصره‌های ۱ و ۲ مربوط به مثال ۱۲ را در مورد این مثال هم می‌توان آورد: نه روش تقسیم پاره خط AB به قسمتها، و نه ثابت بودن طول منحنی موجی نقشی بازی نمی‌کند. همچنین مثل مثال قبل‌می‌توان درهر بار به‌جای محیط یکی از نیمدایره‌ها قطر آنرا در نظر گرفت، در اینصورت طول منحنی موجی متغیر می‌شود. خواننده می‌تواند وضع دیگری را هم مورد مطالعه قرار دهد: بجای نیمدایره‌ها، یعنی قوسهای حاوی زاویهٔ قائمه، از قوسهای حاوی زوایای دیگری استفاده‌کند (این زاویه می‌تواند ثابت باشد و یا طبق قانون معینی که به تعداد تقسیمات بستگی دارد تغییر کند، بشرطی که بسمت صفر میل نکند)؛ در اینصورت برای عدد π مقادیر دیگری به دست می‌آید.

مثال ۱۴. استوانهٔ شوارتز.

وقتی که می‌خواهند قوس $\widehat{AB}$ از یک منحنی را اندازه بگیرند (شکل ۲۹ ـ سمت چپ)، تقریباً به همان ترتیب اندازه‌گیری محیط دایره یا قوسی از آن عمل می‌کنند: در این قوس خط شکسته‌ای محاط می‌کنند (در اینجا لزومی



شکل ۲۹

ندارد که این خط شکسته حتماً منتظم باشد، زیرا برای بعضی از قوسها تحقق این شرط ممکن نیست)، سپس دنبالهٔ نامتناهی از اینگونه خطهای شکسته درنظر می‌گیرند، به نحوی که رأسهای مجاور مرتباً به هم نزدیکتر شوند، یعنی هرضلع این خط شکسته به سمت صفر میل کند. دنبالهٔ طولهای این خطهای شکسته‌دارای حدی خواهد بود که مساوی طول قوس مربوطه است.

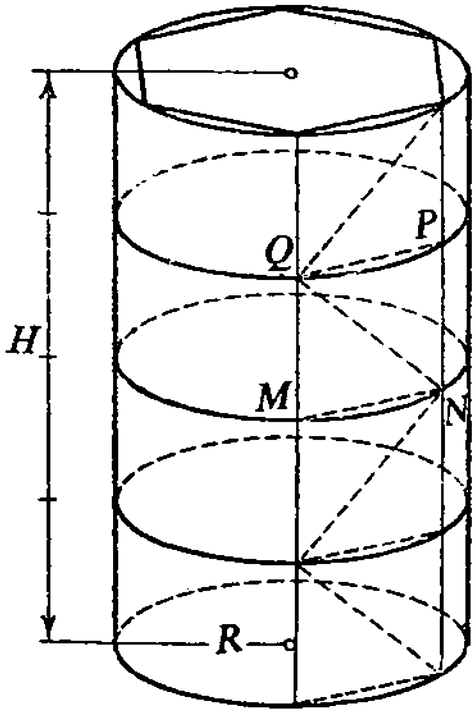
اگر یک بعد اضافه کنیم، به مسئله‌ای شبیه مسئلهٔ بالا می‌رسیم: مطلوبست اندازهٔ مساحت شکل F که روی یک سطح منحنی قرارگرفته است (شکل ۲۹ ـ سمت راست). شبیه حالت مربوط به قوس، طبیعی است به‌این ترتیب عمل‌کنیم: دراین شکل چند وجهیهائی محاط کنیم[1] که مساحت وجوه آن به ترتیب کوچک و کوچکتر شود؛ مساحت شکل F حد مساحتهای این چند وجهیها خواهد بود (یعنی حد مجموع مساحتهای وجوه آن). مطلب را دقیق‌تر کنیم: داخل شکل F و روی سطح آن مجموعه‌ای از نقاط انتخاب می‌کنیم و آنها را سه به سه به هم وصل می‌کنیم تا یک سطح چند وجهی با وجوه مثلثی تشکیل شود، به نحوی که

۱. چند وجهی را محاط دریک سطح منحنی‌گوئیم، وقتی‌که رأسهای چند‌وجهی براین سطح قرارگرفته باشد.

هیچ دو مثلثی دارای نقاط مشترک درونی نباشند و هیچ سه مثلثی یال مشترکی نداشته باشند. دنبالهٔ نامتناهی سطوح چندوجهی F_1 ، F_2 ، . . . ، F_n ، . . . را محاط در شکل F چنان تشکیل می‌دهیم که طول بزرگترین یال (یعنی بزرگترین ضلع از بین همهٔ مثلثها) از سطح F_n ، وقتی $n \to \infty$ ، به سمت صفرمیل‌کند وهر نقطهٔ شکل F حد دنبالهٔ نقاطی باشد که به‌ترتیب روی F_1 ، F_2 ، . . . ، F_n ، . . . انتخاب شده است (و این از اینجهت ممکن است که وجه سطح چندوجهی همیشه در سطح شکل F محاط است). تقریباً واضح به نظر می‌رسد که دنبالهٔ مساحتهای چندوجهیهای F_1 ، F_2 ، . . . ، F_n ، . . . دارای حدی مساوی مساحت F است. دراینجا هم همچون مثالهای قبل توجه می‌کنیم که بین سطح منحنی و چندوجهی محاط در آن، وقتی که وجوه چندوجهی خیلی کوچک شده باشند، عملاً اختلافی وجود ندارد. ولی شوارتز ریاضی‌دان آلمانی در اواخر قرن گذشته روی مثال ساده‌ای ثابت کرد که این وضوح ظاهری مارا فریب می‌دهد؛ ما هم دراینجا به همین مثال می‌پردازیم.

استوانهٔ دوار قائمی به شعاع R وارتفاع H درنظر می‌گیریم (شکل ۳۰)؛ سطح جانبی این استوانه را با روشی که در بالا ذکر کردیم پیدا می‌کنیم. برای این منظور ارتفاع را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و از هر نقطه صفحه‌ای عمود بر مولد استوانه عبور می‌دهیم، از برخورد این صفحه‌ها با سطح جانبی استوانه $n - 1$ دایره به دست می‌آید که با توجه به دو قاعده، سطح جانبی استوانه را به n کمربند استوانه‌ای مساوی تقسیم می‌کند. در یکی ازاین دایره‌ها یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم، مولدهائی‌که از رأسهای این چندضلعی عبور می‌کنند هریک از دایره‌های دیگر را به m قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، این نقاط تلاقی رأسهای m ضلعیهای منتظم را در هریک از دایره‌ها تشکیل می‌دهند. پاره‌خطهائی که روی مولدها به وجود می‌آید با اضلاع چندضلعیهای محاطی رویهم به تعداد mn مستطیل یکجور تشکیل می‌دهند (که یکی از آنها $MNPQ$ است که در شکل ۳۰ نشان داده شده است)، رأسهای این مستطیلها روی سطح جانبی استوانه قرار دارند. حالا اگر هریک ازاین مستطیلها را با رسم قطر به دو مثلث تقسیم‌کنیم یک سطح چندوجهی به دست می‌آید که درسطح جانبی استوانه محاط شده است و وجوه آنرا $2mn$ مثلث یکجور تشکیل می‌دهند. وقتی که عددهای m و n هردو بطور نامحدود بزرگ شوند، اضلاع این مثلثها وهمراه آن

فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر سطح این چندوجهی از سطـح جانبی استوانه به سمت صفر میل می‌کند[۱].



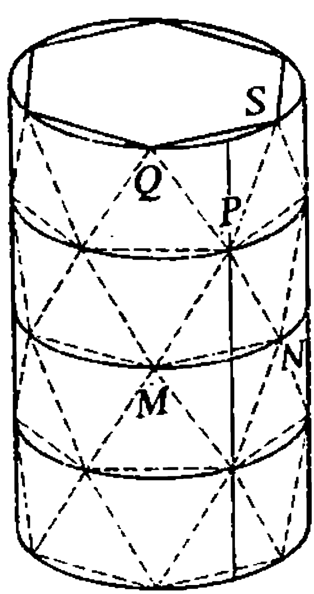
شکل ۳۰

هریک از چندوجهیهای محاطی مذکـور بـه وسیلهٔ دو عدد m و n معین می‌شونـد، ولی بـه بـی‌نهایت طریق می‌توان دنبالهٔ این‌چندوجهیها را به‌وجود آورد، به این تـرتیب‌که یکی از این دو عدد را تابعی دلخواه از دیگری بگیریم (توجه مـی‌کنیم کـه هر دو عدد m و n طبیعی‌اند و باهم به سمت بی‌نهایت میل مـی‌کنند). مثـلاً می‌تـوان $m = n$ یا $n = 3m$ یـا $m = n^2$ و غیره فرض کرد. احتمالاً خواننده به این نکته توجه کرده باشد کـه سطح چندوجهی مـا در واقع سطح جانبی یک منشور m وجهی محاط دراستوانه را تشکیل می‌دهد که با تقسیم هریک از m مستطیل جانبی این منشور به $2n$ مثلث، به‌همان هدفی می‌رسیم که در شکل ۲۹ تعقیب کردیم. به این ترتیب تنها با روش دیگری برای محاسبهٔ سطح جانبی استوانه روبروهستیم (این سطح مساوی $2\pi RH$ است) که به‌کمک سطح جانبی منشور و باعبور حدی بدست می‌آید و روشن است که دراستدلال ما هیچگونه سفسطه‌ای وجود ندارد.

حالا بعضی تغییرات در روش محاط‌کردن چندوجهی می‌دهیم. ابتدا ارتفاع H را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، $n - 1$ مقطع دایره‌ای بدست می‌آید که با دو قاعدهٔ استوانه رویهم $n + 1$ دایره می‌شود؛ در هریک از این دایره‌ها یک n ضلعی منتظم محـاط می‌کنیم، منتهـا ترتیب رأسهـای این m ضلعیهـا را چنان انتخـاب می‌کنیم که هـر مولدی که از یک رأس یک m ضلعی محـاطی

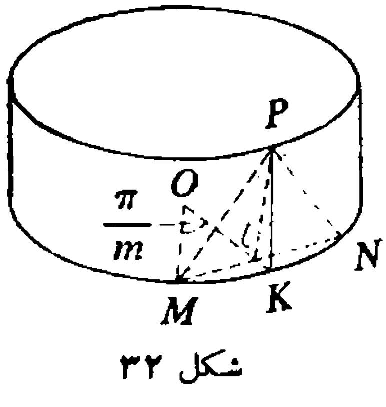
۱. فاصلهٔ هر نقطه از سطح جانبی استوانه عبارتست از اختلاف بین شعاع استوانه و فاصلهٔ این نقطه از محور استوانه.

می‌گذرد قوسهای مربوط به اضلاع m ضلعیهای دایره‌های مجاور را نصف کند، مثلاً در شکل ۳۱ مولدی که از رأس P می‌گذرد، قوسهای $\widehat{MN}$ و $\widehat{QS}$ را نصف می‌کند؛ البته خطوط QM و SN (که در شکل رسم نشده‌اند) نیز مولدهای استوانه خواهند بود. به‌عبارت دیگر: در اینجا هم، مثل قبل، هر چندضلعی محاط در دایره از انتقال چندضلعی محاط در دایرهٔ مجاور به اندازهٔ $\frac{H}{n}$ به دست می‌آید، منتها بعد از انتقال، چندضلعی را به اندازهٔ نصف زاویهٔ مرکزی هر ضلع، یعنی $\frac{\pi}{m}$ دور مرکز آن دوران می‌دهیم. حالا با چندضلعیهای منتظم محاطی که به این ترتیب بدست آمده است یک چندوجهی با وجوه مثلثی می‌سازیم، به این ترتیب که هر رأس را به‌دو رأس نزدیک خود در دایره‌های مجاور وصل می‌کنیم. این سطح چندوجهی (که می‌توان آنرا بصورت یک فانوس کاغذی با مرزهای تا شده در نظر گرفت)، که از تعداد $2mn$ مثلث متساوی‌الساقین مساوی تشکیل شده است (n طبقه و در هرطبقه $2m$ مثلث)، برای سطح منحنی استوانه یک چندوجهی محاطی را به‌مفهوم واقعی خود مشخص می‌کند.



شکل ۳۱

واضح است که برای محاسبهٔ مساحت این چندوجهی باید مساحت یکی از وجوه آنرا، مثلاً وجه MNP، بدست آورد. این وجه در شکل ۳۱ نشان داده شده است و در شکل ۳۲ بطور جداگانه مشخص شده است، که در آن MN عبارتست از ضلع m ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مقطع به مرکز O، K و L به ترتیب وسط قوس $\widehat{MN}$ و وتر MN در نظر گرفته شده است و PK پاره‌خطی از مولد استوانه است. مثلث MNP متساوی‌الساقین است ($PM = PN$، زیرا



شکل ۳۲

این پاره‌خطها روی صفحهٔ دایرهٔ O تصاویر مساوی KM و KN را دارد)؛ PL ارتفاع این مثلث را می‌توان از مثلث PKL به‌دست آورد که در آن داریم:

$$PK = \frac{H}{n}،\ \widehat{K} = ۹۰^\circ$$

و
$$KL = R - OL = R - R\cos\frac{\pi}{m} = ۲\,R\sin^{۲}\frac{\pi}{۲m}$$

از آنجا :

$$PL = \sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^{۲} + ۴\,R^{۲}\sin^{۴}\frac{\pi}{۲m}}$$

و چون داریم :

$$\frac{۱}{۲}MN = R.\sin\frac{\pi}{m}$$

بدست می‌آید :

$$S_{MNP} = R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^{۲}}{n^{۲}} + ۴\,R^{۲}\sin^{۴}\frac{\pi}{۲m}}$$

مساحت سطح تمام چندوجهی را $S_{m,n}$ می‌گیریم (که از تقسیم هر دایره به m قسمت مساوی و ارتفاع استوانه به n قسمت مساوی بدست آمده است)، در این صورت داریم:

$$S_{m,n} = ۲\,mn\,R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^{۲}}{n^{۲}} + ۴\,R^{۲}\sin^{۴}\frac{\pi}{۲m}} =$$

$$= ۲\,mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^{۲} + ۴\,n^{۲}\,R^{۲}\sin^{۴}\frac{\pi}{۲m}}$$

همانطور که قبلاً هم متذکر شدیم از مجموعهٔ عددهای $S_{m,n}$ می‌توان به بی‌نهایت طریق دنباله‌ای را جدا کرد که به‌ارتباط بین m و n مربوط می‌شود؛ دو نمونه ازاین حالتها را درنظر می‌گیریم:

a) $n = m^{۲}$ ، یعنی وقتی که بترتیب هر دایره را به ۳ ، ۴ ، ۵ ، ... قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، ارتفاع استوانه متناظراً به ۹، ۱۶، ۲۵، ... قسمت مساوی تقسیم شده است. حالا دیگر مساحت سطح چندوجهی را به S_m نشان

می‌دهیم، زیرا این مساحت تنها به m بستگی دارد، رابطهٔ مساحت چنین می‌شود:

$$S_m = ۲m R \sin\frac{\pi}{m} \sqrt{H^۲ + ۴m^۴ R^۲ \sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

حالا باید حد مقدار S_m را، وقتی $m \to \infty$، حساب کرد؛ در اینصورت $\frac{\pi}{m}$ و در نتیجه $\sin\frac{\pi}{m}$ و $\sin\frac{\pi}{۲m}$ به سمت صفر میل می‌کند. عبارت S_m را می‌توان چنین نوشت:

$$S_m = ۲\pi R \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^۲ + \frac{۱}{۴}\pi^۴ R^۲ \left(\frac{\sin\frac{\pi}{۲m}}{\frac{\pi}{۲m}}\right)^۴}$$

که درنتیجه بدست می‌آید:

$$\underset{m\to\infty}{\text{حد}} S_m = ۲\pi R \sqrt{H^۲ + \frac{۱}{۴}\pi^۴ R^۲}$$

و واضح است که این حد از $۲\pi RH$، یعنی سطح جانبی استوانه، بزرگتر است. اگر $n = km^۲$ بگیریم (k عددی طبیعی است)، می‌توان این مساحت را به هر اندازه که لازم باشد بزرگتر بدست آورد، زیرا دراینصورت داریم:

$$\underset{m\to\infty}{\text{حد}} S_m = ۲\pi R \sqrt{H^۲ + \frac{K^۲}{۴}\pi^۴ R^۲}$$

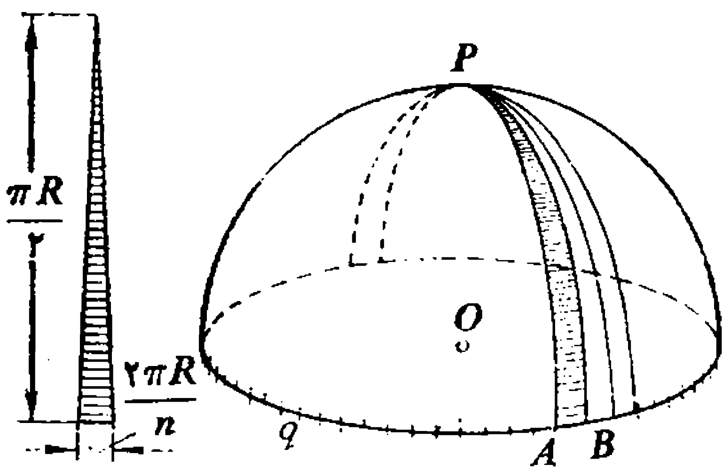
b) $n = m^۳$، که در اینجا تعداد تقسیمات ارتفاع نسبت بـه حالت قبل خیلی سریعتر ازتعداد تقسیمات محیط دایره بزرگ می‌شود. دراین‌حالت بسادگی معلوم می‌شود که وقتی $m \to \infty$، S_m نیزبسمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. یعنی می‌توان چندوجهیهـای محاطی را با قانونی درست کرد که مساحت آنها بسمت هیچ حدی میل نکند و بطور نامحدود صعودی باشد. به این ترتیب نتیجه می‌شود که سطح جانبی استوانه دارای مساحت معینی نیست.

می بینید که به‌نتیجهٔ نامناسبی‌رسیده‌ایم و باید خطای استدلال را جستجوکنیم.

مثال ۱۵. مساحت کرهٔ به شعاع R برابر است با $\pi^۲R^۲$.

نیمکرهٔ بـه مرکز O را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۳)، q را «استوا» و P

را «قطب» آن فرض می‌کنیم (یعنی شعاع OP برصفحهٔ استوای q که از O گذشته است، عمود است). محیط دایرهٔ q را بـه n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (n را عددی خیلی بزرگ درنظر می‌گیریم) و از P به تمام نقاط تقسیم به‌وسیلهٔ قوسهای



شکل ۳۳

دایرهٔ عظیمه وصل می‌کنیم (هریک ازاین قوسها مساوی $\frac{۱}{۴}$ «نصف‌النهار» است)؛ در اینصورت نیمکره به n مثلث کروی خیلی باریک تقسیم می‌شود، بطـوریکه هریک از مثلثها محـدود است به قوس بسیار کوچـکی از استـوا و دو قـوس نصف‌النهار (چندتا از این مثلثها در شکل داده شده ویکی از آنهـا، مثلث PAB با هاشور مشخص شده است). با بزرگ کردن عدد n می‌توان این مثلثهای کروی را به‌دلخواه کوچک کرد (به‌صورت تارهای نازک) با باز کردن هر یک از این مثلثها، می‌توان آنهارا با حفظ تمام اندازه‌ها (یعنی طول، زاویه و سطح) بریک صفحه قرار داد. در اینصورت مثلثهای متساوی‌الساقینی به دست می‌آید که قاعدهٔ هریک ازآنها قوسی بطول $\frac{۲\pi R}{n}$ و ارتفاع هـر یک قوسی مساوی یکچهـارم دایره یعنی بـه طول $\frac{\pi R}{۲}$ است (شکل سمت چپ ۳۳ را ببینید). مساحت چنین مثلثی برابر است با: $\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲\pi R}{n} \cdot \frac{\pi R}{۲} = \frac{۱}{۲n}\pi^۲ R^۲$، بنابراین مساحت کل

تمام n مثلث که نیمکره را پوشانده‌اند مساوی $\frac{۱}{۲}\pi^۲R^۲$ و مساحت تمام کره مساوی $\pi^۲R^۲$ می‌شود. و واضح است که این نتیجه با رابطهٔ واقعی سطح کره یعنی $۴\pi R^۲$، یکی نیست (زیرا $\pi \neq ۴$).

۴
تجزیه و تحلیل مثالهای فصل سوم

دربارهٔ مثال ۱۱. ظاهراً این مسئله بیش از آنکه به هندسه مربوط باشد، به مکانیک (یا بهتر بگوئیم سینماتیک ـ یعنی علم مطالعهٔ حرکات) مربوط است، زیرا دربارهٔ چرخی صحبت می‌شود که به وضع خاصی حرکت می‌کند. از طرف دیگر ازقبل می‌توان پیش‌بینی کرد که این لفاف مکانیکی مسئله را می‌توان کنار گذاشت، زیرا زمان در اینجا هیچ نقش واقعی ندارد (مثلاً اگر سرعت حرکت چرخ را تند یا کند کنیم، هیچ تغییری در وضع مسئله پیدا نمی‌شود)؛ تمام سفسطهٔ مسئله را می‌توان با زبان هندسه بیان کرد و ما هم کمی بعدتر به آن می‌پردازیم.

بدون تردید نقطهٔ ضعف استدلال ما در بیان این جمله است: «دایره (بدون لغزش) بر خط راست می‌غلتد». باید دربارهٔ مفهوم دقیق جملهٔ اخیر صحبت کنیم، در اینصورت فوراً کشف خواهد شد که اگر یکی از دو دایرهٔ متصل بهم به این مفهوم بغلتد، دیگری نمی‌غلتد و به این ترتیب نادرستی اثبات روشن می‌شود.

ابتدا با زبان سینماتیک صحبت می‌کنیم. وقتی که می‌گوئیم دایره روی خط راست بدون لغزش می‌غلتد به این معنی است که: دایره چنان حرکت می‌کند که درهر لحظه بر خط مماس است وضمناً نقطه‌ای از دایره‌که به عنوان نقطهٔ تماس بر خط قرار گرفته است، در این لحظه سرعتی مساوی صفر دارد. به‌عبارت دیگر نقطه‌ای از دایره که در لحظهٔ مفروض در «پائین»، یعنی در نقطهٔ «تماس»،

قرار گرفته است ، برای دایرهٔ غلتنده «مرکز دوران لحظه‌ای» است. این مطلب به این معناست که سرعت هر نقطهٔ مربوط بـه دایره (اجباری نیست که این نقطه روی محیط دایره باشد) در هرلحظه به‌این ترتیب معین می‌شود که توجه کنیم که دایره در این لحظه دور نقطهٔ تماس دوران می‌کند. بخصوص امتداد این سرعت عمود بـرخطی است که نقطهٔ مفروض را به نقطهٔ تماس وصل کند؛ مثلاً با توجه به شکل۲۴، سرعت نقطه‌ای که دروضع M' است، در جهت عمود برخط $M'P$ قرار دارد (بنا بـر این ، برای سیکلوئید شکل ۲۶، قائم در نقطهٔ M' عبارتست از خط $M'P$) .

با مفهوم مخالف، اگر نقطه‌ای از دایره در لحظه‌ای که «پائین» قرارگرفته است، سرعتی مخالف صفر داشته باشد، گویند حرکتی «بـا لغزش مثبت» دارد وقتی که سرعتش در جهت حرکت باشد، وحرکتی «با لغزش منفی» دارد وقتی‌که سرعتش در جهت مخالف حرکت باشد. تنها در حالتی که لغزش وجود نداشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی دایره روی خط راست می‌غلتد، شعاع دایره به اندازهٔ زاویه‌ای دوران می‌کند و راه طی شده برابر است با طـول قوس مقابل به ایـن زاویه؛ مثلاً در شکلهای ۲۴ و ۲۶ داریم: $MP = \widehat{PM'}$ و بخصوص MM^* برابر است با طـول محیط دایره‌ای که می‌غلتد. در حالتی که لغـزش مثبت باشد $MP < \widehat{PM'}$ و درحالتی که لغزش منفی باشد $MP > \widehat{PM'}$.

حالا با بیان هندسی‌خالص اختلاف انواع غلتیدن را شرح می‌دهیم، اگرچه بخاطر روشنتر بودن مطلب گاهی از زبان سینما تیک هم استفاده می‌کنیم. پاره‌خط $MM^* = 2\pi R$ (شکلهـای ۲۴ و ۲۶) را در نظر می‌گیریم و در هـر نقطهٔ آن مثل P ودر یکطرف خط MM^* دایـره‌ای بمرکز O' و شعاع R' رسم می‌کنیم؛ روی این دایره قوس $\widehat{PM'}$ را مساوی طول پاره‌خط PM به نحوی جدا می‌کنیم که $\widehat{PM'}$ و PM نسبت بـه نقطهٔ P در یکجهت باشند[1]، اگر این ساختمـان را برای همهٔ اوضاع ممکنهٔ نقطهٔ P روی پاره‌خط MM^* انجام دهیم،گوئیم (اگرچه

---

۱. این مطلب به معنای آنست که قوس $\widehat{PM'}$ (و اگر این قوس بزرگتر از نیمدایره است، قسمتی ازآن که به P متصل است) وپاره‌خط PM در یکطرف قطر PO' قرار گرفته باشند.

با زبـان سینماتیک بیان می‌کنیم، در واقع از حوزهٔ هندسه خارج نمی‌شویم) که مجموعهٔ همهٔ دایره‌های مماس از یک دوران دایرهٔ بـه شعاع R، که بدون لغزش روی خـط MN می‌غلتد، روی خط MN بدست می‌آیـد، و مکان هندسی نقطهٔ M'، متناظر با اوضاع مختلف نقطهٔ P، عبارتست ازمسیر نقطهٔ M. اگر درساختمان قبل تساوی $MP = \widehat{PM'}$ به $MP = K\widehat{PM'}$ تغییر دهیم (K ضریب ثابتی مخالف واحد است)، می‌گوئیم که دایرهٔ «با لغزش ثابت به ضریب K» می‌غلتد، ضمناً لغزش را مثبت یا منفی گوئیم وقتی که تفاضل $K - ۱$ مثبت یا منفی باشد.

با این تعریف دقیق، حالا به مسئلهٔ مربوط بـه چرخ برمی‌گردیم. از نقطه نظر سینماتیک، وقتی که از دو دایـرهٔ متحدالمرکز، دایرهٔ بزرگتـر بدون لغزش روی خط MN می‌غلتد (شکل ۲۴)، دایرهٔ کوچکتر روی خط $M_۱N_۱$ نخواهـد غلتیـد. در حقیقت، اگر دایرهٔ کوچکتر هـم بدون لغزش بغلتد، در لحظه‌ای کـه مرکز مشترک دو دایره روی O' قرار گیرد، شکل متحرک دارای دو مرکز دوران لحظه‌ای P و $P_۱$ خواهد بود (ودر اینصورت سرعت نقطهٔ M' باید هم درجهت عمود بر PM' و هم درجهت عمود بر $P_۱M'$ باشد که ممکن نیست). علاوه بر آن می‌توان گفت که دایرهٔ کوچکتر با لغزش مثبت می‌غلتد، زیرا در هر حـال داریم :

$$M_۱P_۱ = MP = \widehat{PM'}$$

و بنابراین:

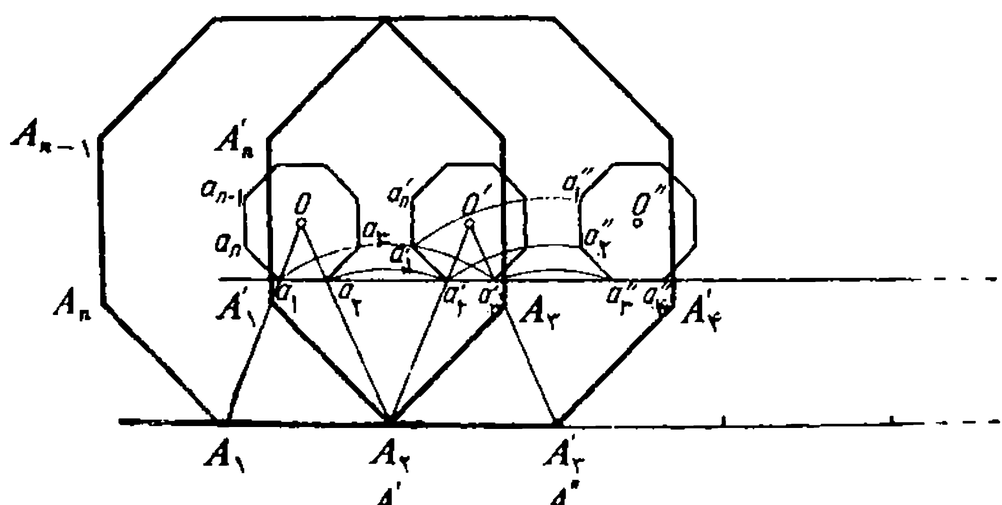
$$M_۱P_۱ > \widehat{P_۱M'_۱}$$

در حالت عکس اگر دایرهٔ کوچکتر را بدون لغزش روی $M_۱N_۱$ بغلتانیم، ثابت می‌شود که دایرهٔ بزرگتر بالغزش منفی خواهد غلتید.

با تعریفهای هندسی هم به همین نتیجه‌هـا می‌توان رسید: وقتی کـه دایرهٔ بزرگتر شکل ۲۴ به نحوی بغلتد که در هر وضـع $MP = \widehat{PM'}$ باشد، برای دایرهٔ کوچکتر $M_۱P_۱ > \widehat{P_۱M'_۱}$ خواهد بود و داریم: $M_۱P_۱ = \frac{R}{r}\widehat{P_۱M_۱}$، که در آن R و r شعاعهای دایره‌های بزرگتـر و کوچکتر هستند. بنابراین دایـرهٔ کوچکتر با لغزش مثبت به ضریب $\frac{R}{r}$ (> ۱) می‌غلتـد. و بر عکس اگر دایـرهٔ

کوچکتر بدون لغزش بغلتد، دایرهٔ بزرگتر با لغزش منفی به ضریب $\frac{r}{R}$ (۱>) خواهد غلتید.

دربارهٔ تبصرهٔ مربوط به مثال۱۱. (صفحهٔ۴۱). دو nضلعی متحدالمرکز $A_1A_2 \cdots A_n$ و $a_1a_2 \cdots a_n$ به مرکز O در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴ که در آن $n = 8$ است و برای چندضلعی بزرگتر همان علامتهای شکل ۲۵ حفظ شده است). فرض کنیم چندضلعی بزرگتر طبق شرح صفحهٔ ۴۲ بغلتد؛ ابتدا رأس A_2 بدون حرکت و تا وقتی که چندضلعی به اندازهٔ $\frac{2\pi}{n}$ دوران کند، مرکز دوران است (برای مقایسه به خاطر می‌آوریم که در غلتیدن دایره هم، نقطهٔ «پائین» مرکز دوران است، منتها مرکز دوران لحظه‌ای). در نتیجهٔ این دوران، چندضلعی بزرگتر بر خط راست روی ضلع دیگر خود A_2A_3 قرار می‌گیرد که در وضع



شکل ۳۴

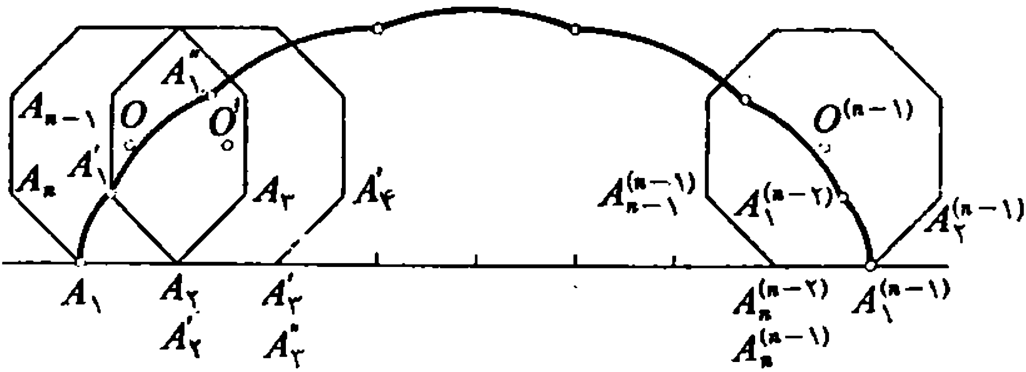
جدید روی شکل بوسیلهٔ $A'_2A'_3$ و در امتداد A_1A_2 نشان داده شده است؛ ضمن این غلتیدن، محیط چندضلعی در طول خط راست «باز می‌شود».

در این حرکت، چندضلعی کوچکتر نیز (که بر چندضلعی بزرگتر محکم شده است) حرکت می‌کند: این چندضلعی هم دور مرکز A_2 و به اندازهٔ زاویهٔ

$\frac{2\pi}{n}$ دوران می‌کند که درنتیجهٔ‌آن ضلع a_2a_3 به‌وضع $a'_2a'_3$ درمی‌آید، ولی دیگر درامتداد پاره‌خط a_1a_2 نیست. درمقابل چندضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$ که ازروی‌یک ضلع به روی ضلع دیگر «جابجا» می‌شود، چندضلعی $a_1a_2 \ldots a_n$از یک وضع به وضع دیگر «پرش» می‌کند (درشکل ۲۴ دو وضع متوالی چندضلعی بزرگتر وسه وضع متوالی‌چندضلعی کوچکتر نشان‌داده شده‌است؛ ضمناً‌حلقه‌های اولیهٔ مسیر برای رأسهای a_1، a_2، a_3 نشان داده شده است: برای هریک ازاین مسیرها با دوقوس دایره‌ای به اندازهٔ $\frac{2\pi}{n}$ رادیان مشخص شده است، مثلاً برای رأس a_2 این‌قوسها عبارتند از $\widehat{a_2a'_2}$ بـه مرکز A_2 و $\widehat{a'_2a''_2}$ به مرکـز A'_3؛ مثل حـالت شکل ۲۵ ، خواننده می‌تواند نتایج خاصی را کـه مربوط به مقـدار ۸ $= n$ است از روی شکل ۳۴ بدست آورد وخود شکل دیگری مثلاً برای ۵ $= n$ رسم کند). به‌این ترتیب وقتی که چندضلعی $a_1a_2 \ldots a_n$ درطـول خط $a_1a_1^{(n-1)}$ « می‌غلتـد » فاصله‌ای بزرگتر از محیـط خود را می‌پیماید کـه شبیه نمونهٔ «غلتیـدن با لغزش مثبت» است. از خواننده می‌خواهیم که این حالت را بررسی کند کـه وقتی چند ضلعی $a_1a_2 \ldots a_n$ بدون لغزش روی خط راست می‌غلتد، چندضـلعی بزرگتـر چگونه حرکت می‌کند: می‌توان پیش‌بینی کرد کـه وقتی چندضلعی کوچکتر بـه اندازهٔ $\frac{2\pi}{n}$ دور یک رأس خود دوران می‌کند، ضلع چندضلعی بزرگتر در قسمتی از خود بر ضلع قبلی این چندضلعی تکیه می‌کند که درنتیجهٔ آن مسیری که ضمن یک دوران کامل طی می‌کند کمتر از محیط آن خواهد بود؛ در اینصورت شکلی شبیه «غلتیدن با لغزش منفی» خواهیم داشت .

دربارهٔ مسئلهٔ مثال ۱۱. (صفحهٔ ۴۴). کافی است شکل را رسم وبعضی نتایج را یادآوری کنیم.

در شکل ۳۵ $A_1A'_1A''_1 \ldots A_1^{(n-1)}$ یعنی مسیر رأس A_1 از چند ضلعی غلتنده داده شده است (حالت خاص ۸ $= n$) ، که شباهتی بـه شکل ۲۶ دارد . طول این مسیر که از قوسهای دایره‌ای تشکیل شده است برابر است با :



شکل ۳۵

$$\frac{2\pi}{n}\cdot 2R\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{4\pi R}{n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

مساحت شکلی که بین این مسیر و پاره خط $A_1A_1^{(n-1)}$ قرار گرفته، تشکیل شده است از:

۱) مساحت قطاعهای

$A_2A_1A'_1$ ، $A'_3A'_1A''_1$ ، . . . ، $A_1^{(n-1)}$ ، $A_n^{(n-2)}A_1^{(n-2)}$

که زاویهٔ مرکزی هر کدام مساوی $\frac{2\pi}{n}$ است؛ مجموع این مساحتها چنین است:

$$\frac{4\pi R^2}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=2\pi R^2;$$

۲) مساحت مثلثهای $A'_1A_2A_3$ ، $A''_1A'_3A''_4$ ، . . . $A_n^{(n-2)}A_{n-1}^{(n-1)}A_1^{(n-2)}$
با مجموع کلی:

$$2R^2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

دربارهٔ مثال ۱۲. از لحاظ منطقی اشتباه مربوط به جملهٔ آخر استدلال است (قبل از تبصرهٔ ۱)، در آنجا که از اصطلاح «حد» در دو مورد استفاده می‌شود. در یک حالت دنبالهٔ خطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد («پلکانها» با تغییر تعداد پله‌های آن) که نقاط واقع بر آن مرتباً به خط معینی نزدیک می‌شود. در حالت دیگر صحبت بر سر دنبالهٔ اعداد (طول «پلکان») است، که به عدد معینی نزدیک می‌شود (در تبصرهٔ ۲ صفحه ۴۷ دیدیم که طول پلکانها را هم می‌توان دنباله‌ای به حساب آورد).

از این مطلب که دنبالهٔ خطوط (با یک مفهوم) به‌سمت خط معینی میل می‌کند، بر هیچ اساسی نمی‌توان نتیجه گرفت که دنبالهٔ طولهای خطوط اول (به مفهوم دیگر) به سمت طول خط اخیر میل می‌کند.

این درست است که وقتی «دندانه‌های» پلکان خیلی کوچک شود، عملاً نمی‌توانیم اختلاف آنرا با پاره‌خط راست متوجه شویم؛ ولی این از لحاظ هندسی، فیزیکی و حتی فیزیولوژیکی هیچ ارتباطی با واقعیت امر ندارد (یک میکروسکوپ قوی وضع را تغییر می‌دهد). ولی اگر در این باره صحبت شود که چیزی بنظر می‌رسد و سپس بوسیلهٔ استدلال تأیید می‌شود، وضع به صورت زیر است. این صحیح است که در هریک از مثلثهای کوچک، اختلاف بین مجموع اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه با وتر مقدار بسیار کوچکی است، ولی‌اگر تعداد این تفاضلها خیلی زیاد شود، می‌توان برای مجموع آنها به هر عدد دلخواهی رسید. اگر بخواهیم دقیق‌تر به اصل مطلب وارد شویم، به این نکته توجه می‌کنیم که دندانه‌های پلکان ازلحاظ فاصله به خط AB نزدیک می‌شوند، نه ازلحاظ جهت: هرقدر این دندانه‌ها کوچک بشوند، همیشه بصورت افقی و قائمند (شکل ۲۷را ببینید)، درحالیکه وتر AB بصورت مایل است.

دربارهٔ مثال ۱۳. در اینجا هم اشتباهی شبیه مثال قبل وجود دارد. دنبالهٔ خطهای موجی بطورنامحدود به پاره‌خط راست نزدیک می‌شوند، درحالیکه‌طول آنها حدی مساوی طول این پاره‌خط ندارد. دراینجا هم همچون مثال قبل، فاصلهٔ خط موجی نسبت به خط AB بسمت صفر میل می‌کند ولی ازلحاظ جهت با آن فرق دارد: پاره‌خط AB افقی است، در حالیکه جهت خط موجی، هرقدر که نیمدایره‌ها، کوچک باشند، همیشه بین افقی و قائم در نوسان است.

دربارهٔ مثال ۱۴. اگرچه نقشهٔ این مثال خیلی بغرنجتر از مثالهای قبلی

است، ولی از لحاظ طبیعت منطقی، سفسطه‌ای مثل مثالهای قبل انجام گرفته است: درست که سطح چندوجهی مرتباً به سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود، ولی از آنجا نمی‌توان نتیجه گرفت که مساحت سطح چندوجهی به مساحت سطح استوانه‌ای بطور نامحدود نزدیک می‌شود. برای اینکه ارتباط بین این دو نوع نزدیکی را بهتر روشن کنیم، متذکر می‌شویم که با همان طریقی که در شکل ۳۱ نشان داده شده است، می‌توان چندوجهی محاطی برای سطح جانبی استوانه بدست آورد که به کمک آن بشود سطح جانبی استوانه‌را محاسبه کرد، مثلاً وقتی که $m = n$ یا $n = ۱۰m$ فرض کنیم و یا بطور کلی وقتی‌که تعداد تقسیمات ارتفاع و تعداد تقسیمات محیط دایره بطور متناسب نسبت به یکدیگر تغییر کنند، مثلاً به ازای $n = ۱۰m$ داریم:

$$S_m = ۲mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^۲ + ۴۰۰\, m^۲ R^۲ \sin^۴\frac{\pi}{۲m}} =$$

$$= ۲\pi R \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^۲ + \frac{۲۵\pi^۲ R^۲}{m^۲}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{۲m}}{\frac{\pi}{۲m}}\right)^۴}$$

که وقتی $m \to \infty$ بدست می‌آید:

$$\underset{m\to\infty}{\text{حد}} S_m = ۲\pi RH = \text{سطح جانبی استوانه}$$

چرا وقتی که با قانون دیگری ومثلاً رابطهٔ $n = m^۲$ مساحت چندوجهی را محاسبه کنیم، S_m بسمت حدی میل می‌کند که از $۲\pi RH$ بزرگتر است و وقتی $n = m^۳$ بگیریم این سطح بسمت بی‌نهایت میل می‌کند؟ جواب این سؤال را با زبان ریاضی نمی‌دهیم و از هرگونه اثباتی صرفنظر می‌کنیم و تنها به آنچه که درتصور ظاهری مطلب بنظر می‌رسد اکتفا می‌کنیم (وواضح است که همین تصور ظاهری است که می‌تواند مبنای استدلال قرار گیرد). وقتی $n = m$ یا $n = ۱۰m$ وغیره می‌گیریم، انبوهی تقسیمات دایره و ارتفاع با سرعتی یکنواخت رو به افزایش است که در نتیجه سطح چندوجهی غیر مقعر خواهد بود و همهٔ وجوه آن تقریباً قائم می‌شود، بشرطی که استوانه را قائم درنظر بگیریم (خواننده با استفاده از شکل ۳۲ می‌تواند ثابت کند که وجه MNP با صفحهٔ افقی زاویهٔ

MKN را می‌سازد که وقتی $m \to \infty$ بسمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند). بنابراین سطح چندوجهی نه‌تنها از لحاظ فاصله، بلکه ازلحاظ جهت هم به سطح جانبی استوانه نزدیک می‌شود. ولی وقتی $n = m^2$ یا $n = m^3$ وغیره فرض کنیم، وضع دیگری پیش‌می‌آید؛ در اینجا تقسیمات ارتفاع با سرعتی بسیار بیشتر از تقسیمات دایره رو به افزایش می‌رود. در نتیجه، سطح چندوجهی بطور محسوس «دندانه دندانه»می‌شود که با محاسبهٔ سطح استوانه مقداری از سطح این چندوجهی به حساب‌نمی‌آید. دراینحالت وجوه مثلثی‌شکل بصورت قائم درنمی‌آیند و می‌توان ثابت‌کرد که وقتی $n = m^2$ باشد، زاویهٔ PLK (شکل ۳۲) بسمت زاویهٔ حاده‌ای میل می‌کند و وقتی $n = m^3$ باشد این زاویه بسمت صفر میل می‌کند (یعنی دراینحالت بصورت افقی درمی‌آید)، بشرطی که $m \to \infty$.

بطور طبیعی سؤالی پیش می‌آید، سرچشمهٔ عدم شباهت بین خط شکستهٔ محاط در یک منحنی و سطح چندوجهی محاط در یک سطح منحنی درکجاست؛ چرا در حالت اول بانزدیک شدن رأسها به یکدیگر، خط شکسته نه‌تنها ازلحاظ فاصله، بلکه ازلحاظ جهت هم به خط منحنی نزدیک می‌شود، درحالیکه درحالت دوم وقتی چندوجهی از لحاظ فاصله به سطح منحنی نزدیک می‌شود، ممکن است ازلحاظ جهت به‌آن نزدیک نشود؛ بدون اینکه به تفصیل وارد این بحث شویم تنها یک واقعیت‌را متذکر می‌شویم. اگر روی یک منحنی دو نقطه درنظربگیریم، بنحوی که یکی ازآنها بدون حرکت باشد، وقتی نقطهٔ متحرك بسمت نقطهٔ ثابت میل می‌کند، پاره‌خطی که آنهارا بهم وصل می‌کند در حد بسمت مماس بر منحنی درنقطهٔ ثابت نزدیک می‌شود. ولی اگر سه نقطه بر یک سطح منحنی در نظر بگیریم واز این سه نقطه یکی‌را ثابت فرض کنیم (فرض می‌کنیم که‌این سه نقطه بر یک استقامت نباشند)، وقتی که دو نقطهٔ دیگر بسمت نقطهٔ ثابت نزدیک شوند، صفحه‌ای که این سه نقطه را بهم وصل می‌کند همیشه بسمت صفحهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ ثابت میل نمی‌کند. مثلاً اگر روی سطح یک کره یک مقطع دایره‌ای در نظر بگیریم و سه نقطه روی این دایره انتخاب کنیم (یکی ثابت و دوتا متغیر)، وقتی که دو نقطهٔ متغیر بسمت نقطهٔ ثابت میل کنند. در هرحال صفحه‌ای که از سه نقطه می‌گذرد همان صفحهٔ مقطع خواهد بود.

دربارهٔ مثال ۱۵. عبارتهائی ازنوع «عدد بسیار بزرگ»، «مثلث خیلی باریک»، «قوس کوچک»، «مثلث بی‌نهایت باریک»، دارای مفهوم ریاضی

نیستند، از این عبارتها می‌توان برای توصیف شکلهای هندسی استفاده کرد (از این روش توصیف قبلاً هم استفاده کرده‌ایم)، ولی مطلقاً مجاز نیستیم از آنها به عنوان وسیلهٔ استدلال برای بدست آوردن روابط استفاده کنیم. اشتباه اصلی در اینجاست که استدلال کرده‌ایم وقتی یک مثلث کروی خیلی باریک باشد می‌توان آنرا روی یک صفحه بازکرد، یعنی مثلث مسطحه را به یک مثلث کروی بهمان طولها و همان زوایا و همان مساحت تبدیل کرد. در حقیقت هرگز یک مثلث کروی را (هرقدر هم که کوچک باشد) نمی‌توان به مفهومی که گفتیم روی یک صفحه بازکرد، این مطلب از اینجا هم روشن می‌شود که مجموع زوایای یک مثلث مسطحه همیشه مساوی دو قائمه است، درحالیکه مجموع زوایای یک مثلث کروی همیشه از دو قائمه بزرگتر است. در مثال ما در مثلث کروی PAB (شکل ۳۳ ـ سمت راست) زوایای A و B قائمه‌اند؛ اگر بتوان چنین مثلثی را روی صفحه بازکرد، مثلث مسطحهٔ متساوی‌الساقینی به دست می‌آید (شکل ۳۳ ـ سمت چپ) که زوایای مجاور به قاعدهٔ آنها قائمه است.

۱۷ـ گلی برای تو (مجموعهٔ شعر)	ازمجدالدین میرفخرائی (گلچین گیلانی)
۱۸ـ مبانی زمین‌شناسی	نوشتهٔ اوبروچف ترجمهٔ عبدالکریم قریب
۱۹ـ گزینهٔ ادب	مصطفی بی‌آزار، محمدحسن ظهوری، علی مرتضائیان ونعمت‌الله مطلوب
۲۰ـ انقلاب افریقا (چاپ دوم)	نوشتهٔ فرانتس فانون ترجمهٔ محمد امین کاردان
۲۱ـ اندیشه‌های میرزافتحعلی آخوندزاده	نوشتهٔ دکتر فریدون آدمیت
۲۲ـ بانگ جرس (راهنمای مشکلات دیوان حافظ)	نوشتهٔ پرتو علوی
۲۳ـ تحلیل ذهن	نوشتهٔ برتراند راسل ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر
۲۴ـ تمثیلات (شش نمایشنامه و یك داستان)	نوشتهٔ میرزافتحعلی آخوندزاده ترجمهٔ میرزا جعفر قراجه‌داغی
۲۵ـ داستانها و قصه‌ها	تألیف مجتبی مینوی
۲۶ـ قضیهٔ رابرت اوپنهایمر	نوشتهٔ هاینار کیپهارت ترجمهٔ نجف دریابندری
۲۷ـ مسیح بازمصلوب	نوشتهٔ نیکوس کازانتزاکیس ترجمهٔ محمد قاضی
۲۸ـ منطق سمبلیك	نوشتهٔ سوزان لنگر ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر
۲۹ـ تاریخ چیست؟	نوشتهٔ ای. اچ. کار ترجمهٔ دکتر حسن کامشاد
۳۰ـ آلبر کامو	نوشتهٔ کانر کروز اوبراین ترجمهٔ عزت‌اله فولادوند
۳۱ـ سفرنامهٔ ونیزیان در ایران	نوشتهٔ پنج سوداگر ونیزی در زمان حکومت آق‌قویونلو ترجمهٔ دکتر منوچهر امیری
۳۲ـ دربارهٔ کلیله و دمنه	نوشتهٔ دکتر محمدجعفر محجوب
۳۳ـ صداشناسی موسیقی	نوشتهٔ امین شهمیری
۳۴ـ استقراء ریاضی	نوشتهٔ سومینسکی ـ گولوونیایاگلوم ترجمهٔ پرویز شهریاری
۳۵ـ جبر و مقابلهٔ خوارزمی	نوشتهٔ محمدبن موسی خوارزمی ترجمهٔ حسین خدیوجم
۳۶ـ رسم فنی	نوشتهٔ امیرمنصور امیر صدری محمدجواد افتخاری
۳۷ـ سرگرمیهای هندسه	نوشتهٔ یاکوب ایسیدورویچ پرلمان ترجمهٔ پرویز شهریاری
۳۸ـ مسائل مسابقات فیزیك ومکانیك	نوشتهٔ س. او. گونچارنکو ترجمهٔ غضنفر بازرگان
۳۹ـ مسائل مسابقات شیمی	نوشتهٔ باقر مظفرزاده

۴۰ـ معادلات دیفرانسیل	نوشتهٔ محمدجواد افتخاری
۴۱ـ آموزش شیمی (چاپ دوم)	نوشتهٔ دکتر پرویز ایزدی
۴۲ـ اصول خطکش محاسبه	نوشتهٔ م. ه. شفیعیها
۴۳ـ روشهای مثلثات	نوشتهٔ پرویز شهریاری احمد فیروزنیا
۴۴ـ روش حل مسائل فیزیك	نوشتهٔ م. اسپرانسکی ترجمهٔ غضنفر بازرگان
۴۵ـ مسائل عمومی ریاضیات	نوشتهٔ باقر امامی
۴۶ـ ریاضیات چیست؟	نوشتهٔ ریچارد کورانت و هربرت رابینز ترجمهٔ حسن صفاری
۴۷ـ ۲۵۰ مسئلهٔ حساب	نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی ترجمهٔ پرویز شهریاری
۴۸ـ فلسفهٔ ریاضی	نوشتهٔ استیفن س. بارکر ترجمهٔ احمد بیرشك
۴۹ـ لگاریتم	نوشتهٔ گ. استاکوف ترجمهٔ پرویز شهریاری
۵۰ـ سخن و سخنوران	نوشتهٔ بدیع‌الزمان فروزانفر
۵۱ـ ریاضیات نوین	نوشتهٔ سرژ برمان ـ رنه بزار ترجمهٔ احمد بیرشك
۵۲ـ تلویزیون	نوشتهٔ مهندس خداداد القابی
۵۳ـ روزهای سیاه غنا	نوشتهٔ قوام نکرومه ترجمهٔ جواد پیمان
۵۴ـ ژان پل سارتر	نوشتهٔ موریس کرنستن ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر
۵۵ـ نامساویها	نوشتهٔ پاول‌پترویچ کاروکین ترجمهٔ پرویز شهریاری
۵۶ـ سفر به فضا (کودکان)	نوشتهٔ لوسیل ساترلند ترجمهٔ احمد ایرانی
۵۷ـ خزندگان و دوزیستان (کودکان)	نوشتهٔ لوسیل ساترلند ترجمهٔ احمد ایرانی
۵۸ـ فردیناند	نوشتهٔ رابرت لاوسن ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی
۵۹ـ قورباغه را می‌شناسید	ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی
۶۰ـ اقبال و غول	نوشتهٔ بنیامین الکین ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی
۶۱ـ علی وآذر (کتاب آموزش انگلیسی برای نوجوانان)	
۶۲ـ هدیه (کتاب آموزش انگلیسی برای نوآموزان)	
۶۳ـ آموزش حروف انگلیسی (برای نوآموزان زبانهای لاتین)	
۶۴ـ راهنمای نقاشی	غلامعلی گنجی

کاوش در ریاضیات ۴

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

خیابان ابوریحان شماره ۱۰۷

بها ۵۰ ریال